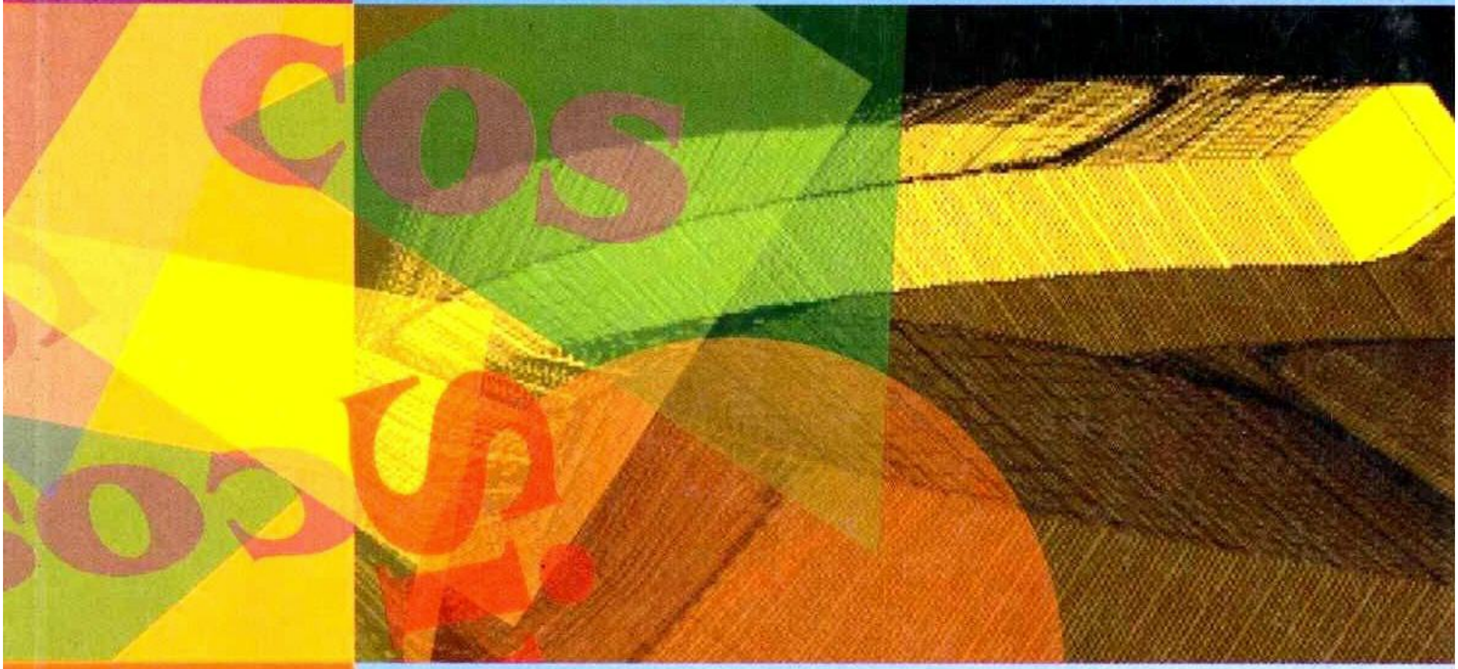
TRẦN MINH QUANG

450 Bài toán TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN HÌNH HỌC GIẢI TÍCH



LUYỆN THI TỐT NGHIỆP THPT, ĐẠI HỌC & CAO ĐẲNG
THEO HƯỚNG RA ĐỀ THI TRẮC NGHIỆM TỪ NĂM 2007

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRẦN MINH QUANG
Cử nhân giáo khoa Toán

450 BÀI TOÁN
TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN
HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

- LUYỆN THI TỐT NGHIỆP THPT VÀ TUYỂN SINH VÀO CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG
- THEO HƯỚNG RA ĐỀ THI TRẮC NGHIỆM TỪ NĂM 2007

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Phần 1

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRÊN MẶT PHẲNG Oxy

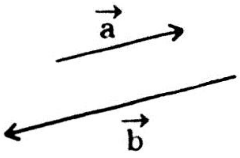
Bài 1 VECTƠ

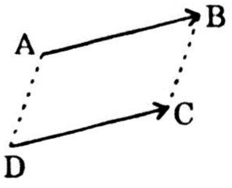
1. Định nghĩa

a) Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.

b) Hai vectơ cùng phương khi chúng có giá song song hoặc trùng nhau.

c) Hai vectơ bằng nhau khi chúng cùng hướng và có cùng độ dài.



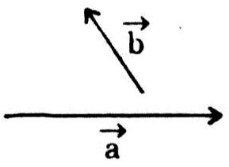


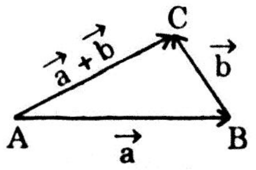
Chú ý : ABCD là hình bình hành ⇔ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ⇔ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

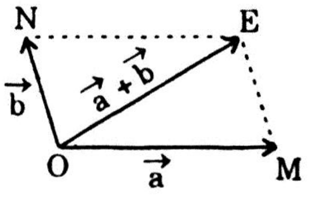
2. Tổng – Hiệu hai vectơ

Cho các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *khác* $\vec{0}$

a) Cộng hai vectơ $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ *:*







Quy tắc ba điểm : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Tính chất : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

b) Hiệu hai vectơ : $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

Quy tắc ba điểm : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ *với O là điểm tùy ý.*

3. Tích vectơ $\vec{a}$ và số thực k

a) Định nghĩa : Tích vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ *và số thực k là một vectơ kí hiệu* $k\vec{a}$ *cùng hướng* $\vec{a}$ *nếu* $k > 0$, *ngược hướng* $\vec{a}$ *nếu* $k < 0$ *và* $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$.

b) Tính chất : $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \qquad (h,\ k \in R)$

$$(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$$

$$h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a} = k(h\vec{a})$$

c) Cho $\vec{a}$ *và* $\vec{b} \neq \vec{0}$

$\vec{a}$ *cùng phương* $\vec{b} \Leftrightarrow \exists k \in R : \vec{a} = k\vec{b}$

4. *Tích vô hướng 2 vectơ :* *Cho* $\vec{a}, \vec{b}$ *khác* $\vec{0}$

Định nghĩa : $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a};\vec{b})$

Tính chất : $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$$

Với h, k ∈ R : $(k.\vec{a}).(h\vec{b}) = hk(\vec{a}.\vec{b})$

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$$

$$(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \pm 2\vec{a}.\vec{b}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2.$$

BÀI TẬP

Bài 1. Cho ABCD là hình bình hành. Gọi M, N là trung điểm BC và AD. Gọi I là giao điểm AM và BN, K là giao điểm DM và CN.

Chứng minh $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{IB}$.

GIẢI

- Ta có AM // MC và AN = MC nên ANMC là hình bình hành.

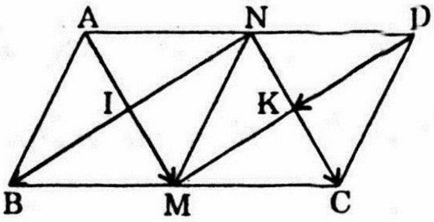
  Do đó $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$.

- Do MNDC hình bình hành nên

  $$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DM}.$$

  Do ANMB hình bình hành nên

  $$\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NB}.$$



Do NDMB hình bình hành nên $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{DM}$.

Vậy $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{IB}$. ■

Bài 2. Cho 5 điểm bất kì A, B, C, D, E. Chứng minh :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}.$$

GIẢI

Ta có : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB}$

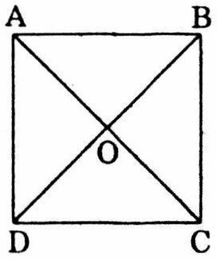
$$= \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$$

$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.$$ ■

Bài 3. Cho ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O.

Tính $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$ và $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}|$ theo a.

GIẢI



- $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BO}$

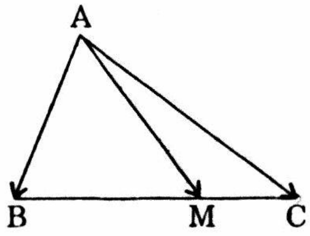
Vậy $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}| = OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

- $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} = -(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}) = -\overrightarrow{DB}$

Vậy $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}| = |-\overrightarrow{DB}| = DB = a\sqrt{2}$. ■

Bài 4. Cho ΔABC. Lấy M trên BC sao cho MB = 2MC. Tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

GIẢI



Ta có : $MB = 2MC \Rightarrow MB = \dfrac{2}{3}BC$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

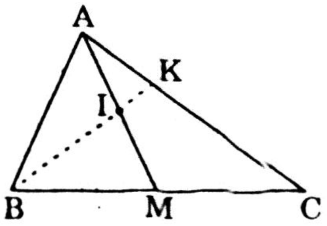
Ta có : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$ ■

Bài 5. Cho ΔABC có trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm AM. Lấy K trên đoạn AC sao cho $AK = \dfrac{1}{3}AC$. Chứng minh B, I, K thẳng hàng.

GIẢI

Ta có : $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$



$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{BA}$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right) = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$$

Vậy B, I, K thẳng hàng. ■

Bài 6. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm ΔABC và ΔA'B'C'. Chứng minh :

$$3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}.$$

GIẢI

Gọi M là trung điểm BC.

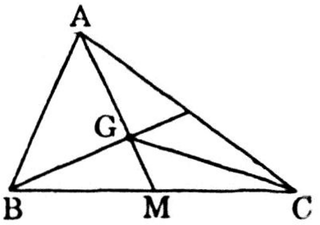
Ta có : $\overrightarrow{GA} + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = -2\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$ (do GA = 2GM)

Tương tự $\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = \vec{0}$

Ta có $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'}$

$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'}$

$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'}$



Vậy $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + 3\overrightarrow{GG'} + (\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'})$

$$= \vec{0} + 3\overrightarrow{GG'} + \vec{0} = 3\overrightarrow{GG'}.$$ ■

Bài 7. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi H và G lần lượt là trực tâm và trọng tâm ΔABC. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O.

Chứng minh :

a) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{HC}$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$

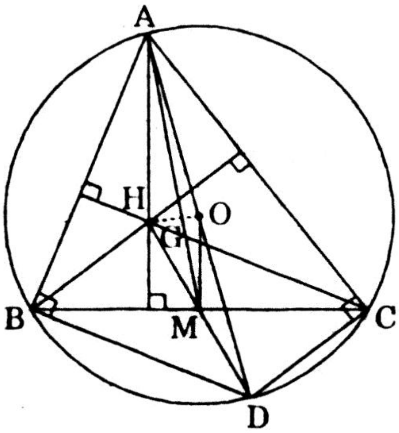
c) Ba điểm O, G, H thẳng hàng.

GIẢI

a) Ta có : $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 1v$ (góc nội tiếp chắn $\frac{1}{2}$ đường tròn)

$\Rightarrow$ BD // CH (cùng $\perp$ AB) và BH // CD (cùng $\perp$ AC)

Vậy BDCH hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{HC}$.



b) HD cắt BC tại M thì M là trung điểm BC.

ΔAHD có OM là đường trung bình nên

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$$

Ta có : $\overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM}$

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH}$$

c) Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC})$

$$= 3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{OG}$$

mà $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ (câu b)

Vậy $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ nên O, G, H thẳng hàng. ■

Bài 8. Cho ΔABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho :

a) $2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$

b) $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = k(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})$ với $k \in R\setminus\{0\}$.

GIẢI

a) Gọi G là trọng tâm ΔABC thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

Gọi I là trung điểm BC thì $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$

Vậy $2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow 2|3\overrightarrow{MG}| = 3|2\overrightarrow{MI}|$

$$\Leftrightarrow MG = MI$$

Do đó tập hợp điểm M là đường trung trực của GI.

b) Gọi E là điểm sao cho : $2\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Ta có : $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA}) - (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB}) + (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EC})$

$$= 2\overrightarrow{ME} + 2\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{ME} + \vec{0}$$

Mặt khác : $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$

Do đó $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = k(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{ME} = \frac{k}{2}\overrightarrow{CB}$ $(k \neq 0)$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng qua E cố định và song song với CB. ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. Cho ABCD là tứ giác có M, N, P Q theo thứ tự là trung điểm AD, BC, DB, AC. Gọi I là trung điểm MN. Chứng minh :

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ **b)** $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

BT2. Cho ΔABC. Gọi D và I là điểm sao cho :

$$3\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

a) Tính $\overrightarrow{AD}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. **b)** Ba điểm I, A, D thẳng hàng.

c) Tìm tập hợp các điểm M sao cho :

$$|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|.$$

BT3. Cho ΔABC và M bất kì. Gọi A', B', C' theo thứ tự là trung điểm BC, CA, AB. Chứng minh :

a) ΔABC và ΔA'B'C' có cùng trọng tâm.

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'}$.

BT4. Cho lục giác đều ABCDEF và điểm M tùy ý. Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF}.$$

BT5. Cho hai điểm A, B có O là trung điểm.

Cho M thỏa $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$. Chứng minh AB = 2OM.

BT6. Cho ΔABC và M, N, P là các điểm sao cho : $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PB}$. Chứng minh :

a) Với I bất kì thì $2\overrightarrow{IM} = 3\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IB}$.

b) Hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

BT7. Cho ΔABC và hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

Chứng minh MN // AC.

37 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

$\boxed{1}$ Cho tứ giác lồi ABCD. Số vectơ $\neq \vec{0}$ có điểm đầu điểm cuối là 2 đỉnh của tứ giác là :

a) 4 b) 6 c) 8 d) 12.

$\boxed{2}$ Số vectơ có điểm đầu và điểm cuối trong 6 điểm phân biệt là :

a) 12 b) 21 c) 30 d) 120.

$\boxed{3}$ Cho 2 đường thẳng song song d_1, d_2. Trên d_1 lấy 6 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 5 điểm phân biệt. Số vectơ có điểm đầu trên d_1, điểm cuối trên d_2 là :

a) 30 b) 25 c) 20 d) 15.

$\boxed{4}$ ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi :

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$ c) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ d) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

$\boxed{5}$ ABCD là hình chữ nhật khi và chỉ khi :

a) $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \\ AC = BD \end{cases}$

c) $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} \end{cases}$

$\boxed{6}$ ABCD là hình thang có đáy AB và CD khi và chỉ khi :

a) $\overrightarrow{AD} \mathbin{//} \overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ với $k \in R\setminus\{0\}$

c) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ với $k > 0$ d) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ với $k < 0$.

$\boxed{7}$ ABCD là hình thoi khi và chỉ khi :

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ b) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ và AC là phân giác $\widehat{BAD}$

c) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ và $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}|$ d) Các kết quả a, b, c đều đúng.

$\boxed{8}$ ABCD là hình vuông khi và chỉ khi :

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0$ và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$.

c) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.

d) AB = BC = CD = AD.

9 H là chân đường cao hạ từ A trong ΔABC khi và chỉ khi :

a) $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$ và $\overrightarrow{BH} // \overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{BC}$ với $k > 0$

d) $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AH} = k\,\overrightarrow{BC}$ với $k < 0$.

10 I là chân đường phân giác trong của ΔABC kẻ từ A khi và chỉ khi :

a) $\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{AB}{AC}$

b) $\overrightarrow{IB} = \dfrac{AB}{AC}\overrightarrow{IC}$

c) $\overrightarrow{IB} = -\dfrac{AB}{AC}\overrightarrow{IC}$

d) $\overrightarrow{IC} = -\dfrac{AB}{AC}\overrightarrow{IA}$.

11 Cho 3 điểm phân biệt A, B, C. Đẳng thức nào sau là đúng :

a) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$

d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.

12 Cho ABCD là hình bình hành. Kết luận nào sau đây là đúng :

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\,\overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$.

13 Cho 5 điểm bất kì M, N, P, Q, R. Vectơ tổng $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$ bằng :

a) $\overrightarrow{MR}$

b) $\overrightarrow{MN}$

c) $\overrightarrow{PR}$

d) $\overrightarrow{MP}$.

14 Cho ABCD là hình bình hành có tâm O. Kết luận nào sau đây là sai :

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 4\,\overrightarrow{AO}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CB}$.

15 Cho ΔABC có G là trọng tâm, I trung điểm BC. Đẳng thức nào sau đây là đúng :

a) $\overrightarrow{GA} = 2\,\overrightarrow{GI}$

b) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 6\,\overrightarrow{GI}$

d) $\overrightarrow{IG} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{IA}$.

16 Cho ΔABC đều có tâm O. Kết luận nào sau là sai :

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AO}$

c) $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$

d) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\,\overrightarrow{CO}$.

17 Cho $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì khác $\vec{0}$. Kết luận nào đúng :

a) $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$

b) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$

c) $\vec{a}$ cùng hướng $k\,\vec{a}$ $(k \in R)$

d) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ cùng hướng $\vec{b}$.

18 Cho ΔABC thì cặp vectơ nào cùng phương :

a) $2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AC}$

b) $5\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$ và $-10\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC}$ và $2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$.

19 Cho ΔABC có G trọng tâm, I trung điểm BC. Gọi D là điểm đối xứng của B qua G. Kết luận nào sau đây là đúng :

a) $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{GI}$

b) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{GC}$

c) $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

d) Các kết luận a, b, c đều đúng.

20 Cho ABCD là hình bình hành. Gọi I, K lần lượt là trung điểm BC và CD thì $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK}$ bằng :

a) $2\overrightarrow{AC}$

b) $\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

c) $\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

d) $3\overrightarrow{AC}$.

21 Cho ΔABC cố định, M là điểm di động thỏa $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3$ thì quỹ tích các điểm M :

a) Đoạn thẳng

b) Đường thẳng

c) Đường tròn

d) Các kết quả a, b, c đều sai.

22 Cho ΔABC có trọng tâm G, I trung điểm BC. Quỹ tích các điểm N di động mà $2|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}| = 3|\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}|$ là :

a) Đường trung trực của IG

b) Đường thẳng qua G và $\perp$ IG

c) Đường thẳng qua G và // IG

d) Đường tròn tâm G, bán kính IG.

23 Cho ΔABC, lấy E trên đoạn BC sao cho $BE = \frac{1}{4}BC$. Hãy chọn kết luận đúng :

a) $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

24 Cho ngũ giác đều ABCDE. Kết luận nào sau đây là sai :

a) $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{EC}$ b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ cùng phương $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$ d) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CE}| = |\overrightarrow{EA}|$.

25 Cho ABCD hình thoi cạnh a có $\widehat{BAD} = 60^0$, O là giao điểm 2 đường chéo. Kết luận nào sau đây là sai :

a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = a\sqrt{3}$ b) $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}| = a\sqrt{3}$

c) $|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}| = a\sqrt{3}$ d) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = a$.

26 Cho ΔABC có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ thì ΔABC :

a) cân   b) đều   c) vuông tại A   d) vuông tại B.

27 Cho ΔABC có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ vuông góc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$ thì ΔABC là tam giác :

a) cân tại A   b) cân tại B   c) cân tại C   d) đều.

28 Biết $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 14$ thì $\vec{a}(\vec{a} + \vec{b})$ bằng :

a) 2   b) -2 c) 52   d) $\frac{23}{2}$.

29 Cho $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Kết luận nào sau đây là đúng :

a) $(2\vec{a})(-3\vec{b}) = -6|\vec{a}|\,|\vec{b}|$ b) $(\vec{a}\,.\,\vec{b})^2 = \vec{a}^2\,.\,\vec{b}^2$

c) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$ d) $\sqrt{\vec{a}^2} = \vec{a}$.

30 Cho ΔABC vuông tại C, có AC = b thì $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$ bằng :

a) $-b^2$ b) b^2 c) $\frac{b^2}{2}$ d) $2b^2$.

31 Cho ΔABC có AB = 5, AC = 8, BC = 7 thì $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$ bằng :

a) 10   b) 20   c) -20 d) 40.

32 Cho ΔABC đều cạnh a, tâm O thì $\overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OC}$ bằng :

a) $-\frac{a^2}{6}$ b) $\frac{a^2}{6}$ c) $\frac{a^2}{3}$ d) $\frac{a^2}{2}$.

33 Cho ABCD hình vuông cạnh a thì giá trị của $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})(2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$

bằng :

a) $a^2\sqrt{2}$ b) $-a^2\sqrt{2}$ c) a^2 d) $2a^2$.

34 Cho ΔABC vuông tại A. Kết luận nào sau đây là sai :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} < \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} < \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} < \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ d) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} < \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}$.

35 ΔABC vuông tại A, có $\widehat{ABC} = 50^0$. Kết luận nào sau đây là sai :

a) $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}) = 130^0$ b) $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AC}) = 40^0$

c) $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CB}) = 50^0$ d) $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{CB}) = 120^0$.

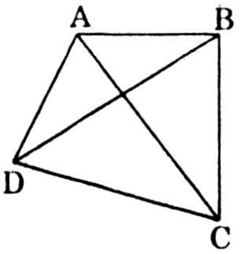
36 ΔABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 60^0$, AB = a thì $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ bằng :

a) $3a^2$ b) $-3a^2$ c) $a^2\sqrt{3}$ d) $-a^2\sqrt{3}$.

37 ΔABC vuông tại C có AC = 9 thì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$ bằng :

a) 9 b) –9 c) 81 d) –81.

TRẢ LỜI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM



1 Số vectơ có giá là 4 cạnh tứ giác : 8.

Số vectơ có giá là 2 đường chéo : 4.

Vậy có 12 vectơ. Chọn d.

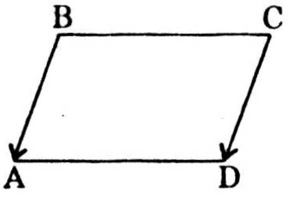
2 Do phép chọn có thứ tự nên có $A_6^2 = 30$ vectơ. Chọn c.

3 Ứng với mỗi điểm trên d_1 ta có 5 vectơ gốc trên d_1 ngọn trên d_2. Mà trên d_1 có 6 điểm. Vậy có $6 \times 5 = 30$ vectơ. Chọn a.

4 ABCD là hình bình hành

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

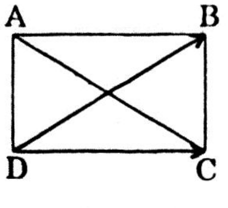
Chọn c.



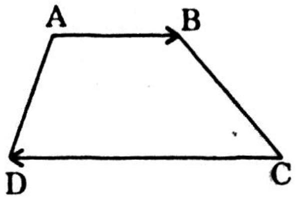
5 ABCD là hình chữ nhật

$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ AB \perp BC \end{cases}$.

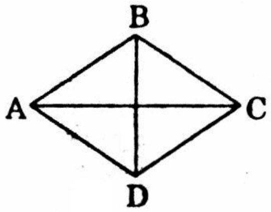
Chọn a.



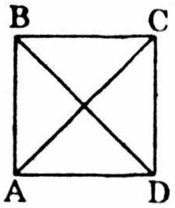
6 $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ phải ngược hướng. Chọn d.



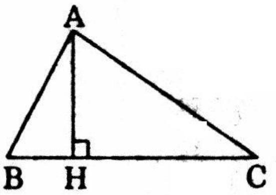
$\boxed{7}$ Chọn d.

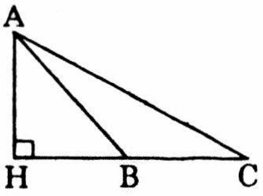


$\boxed{8}$ Chọn b.



$\boxed{9}$ Chọn b, chỉ cần $\overrightarrow{BH} \,//\, \overrightarrow{BC}$

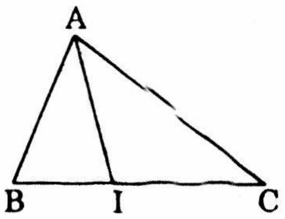




$\boxed{10}$ I chân phân giác trong của $\widehat{BAC}$

$$\Rightarrow \quad \frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$$

mà I nằm giữa B, C $\Rightarrow$ $\overrightarrow{IB} = -\dfrac{AB}{AC}\,\overrightarrow{IC}$. Chọn c.



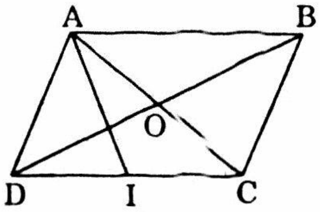
$\boxed{11}$ Xét c) : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$. Chọn c đúng.

$\boxed{12}$ Xét d) : $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} \neq \overrightarrow{CD}$. → d sai.

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}) = 2\,\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{AD}$. → a sai.

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AI} \neq \overrightarrow{AB}$. → b sai.

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}) = 2\,\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{BC}$. → c đúng.



$\boxed{13}$ $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RN} = \overrightarrow{MN}$. Chọn b.

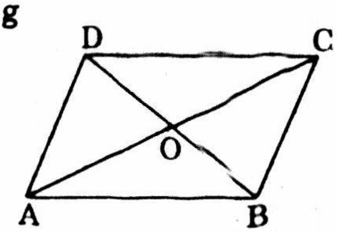
$\boxed{14}$ a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AO} + 2\,\overrightarrow{AO} = 4\,\overrightarrow{AO}$. → a đúng

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB} \neq \overrightarrow{BD}$. → b sai.

c) Dĩ nhiên đúng.

d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CB}$. → d đúng.

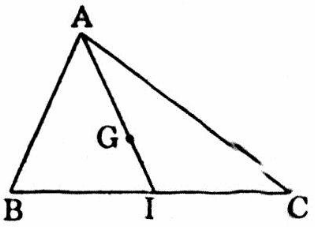
⇒ Mệnh đề sai : b.



$\boxed{15}$ $\overrightarrow{GA} = -2\,\overrightarrow{GI}$. → a sai.

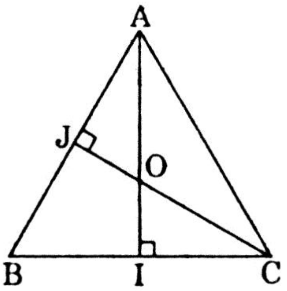
$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA}$. → b sai.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AI} = 2(3\,\overrightarrow{GI})$. → c đúng.



$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$. → d sai.

$\Rightarrow$ Chọn c.



16 Dĩ nhiên a, c đúng.

Xét b) : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} = 2\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AO}\right) = 3\overrightarrow{AO}$ đúng.

Xét d) : $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CJ} = 2\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{CO}\right)$. → d sai.

17 Cho $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$.

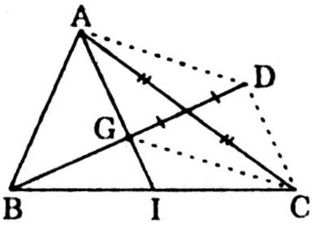
a) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$; b) $|\vec{a} - \vec{b}| \geq |\vec{a}| - |\vec{b}|$. Dĩ nhiên a, b sai.

$\vec{a}$ cùng hướng $k\vec{a}$ khi $k > 0$ nên c) sai.

d) đúng.

18 Xét b) : $-10\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC} = -2(5\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC})$. → b đúng.

19 ΔBDC có GI là đường trung bình $\Rightarrow \overrightarrow{GI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. → a đúng.

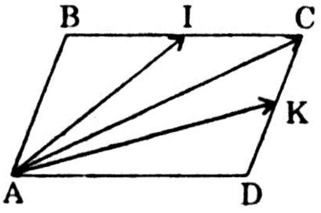


Mà $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GI} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{GC}$. → b đúng.

Chọn d không cần kiểm tra c.

20 $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$



$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. Chọn c.

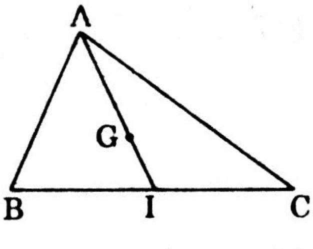
21 Ta có : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ (G trọng tâm ΔABC)

$\Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |3\overrightarrow{MG}| = 3 \Rightarrow MG = 1$

$\Rightarrow$ M $\in$ đường tròn (G, R = 1). Chọn c.

22 Ta có : $2|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}| = 3|\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}|$

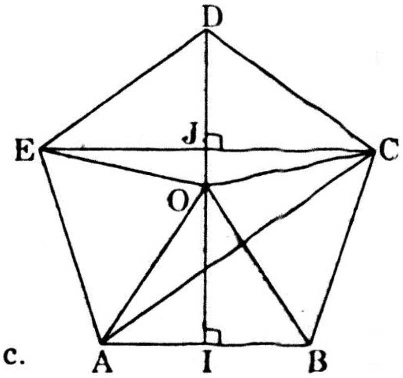
$\Leftrightarrow 2|3\overrightarrow{NG}| = 3|2\overrightarrow{NI}| \Leftrightarrow NG = NI$



Vậy quỹ tích N là đường trung trực của IG. Chọn a.

$\boxed{23}$ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. Chọn b.

$\boxed{24}$ • AB // EC do ABEC thang cân. → a đúng.



• $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\,\overrightarrow{OI}$

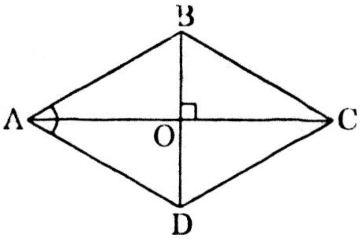
$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = 2\,\overrightarrow{OJ}$

mà $\overrightarrow{OI} \,//\, \overrightarrow{OJ}$. → b đúng.

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} = 2\,\overrightarrow{OI} + 2\,\overrightarrow{OJ} \neq \vec{0}$. Chọn c.

d) AB = AE = BC = CD = DE. → d đúng.

$\boxed{25}$ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$, → a đúng.

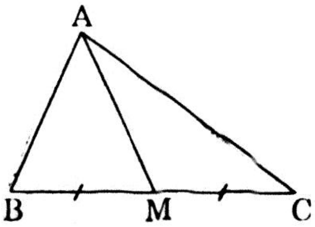


$|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = a\sqrt{3}$, → b đúng.

$|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = a$, → d đúng.

$|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DO} - \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{CO}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, → c sai.

$\boxed{26}$ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2AM$



$|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = CB$

Do BC = 2AM nên ΔABC vuông tại A. Chọn c.

$\boxed{27}$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} \Rightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) = 0$

$\Rightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 0$

$\Rightarrow AB^2 - AC^2 = 0 \Rightarrow$ ΔABC cân tại A. Chọn a.

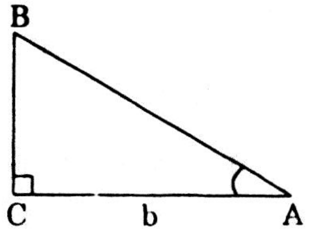
$\boxed{28}$ $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 196 \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} = 196$

$\Leftrightarrow 2\vec{a}.\vec{b} = 196 - 25 - 144 = 27$

Vậy $\vec{a}(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - \vec{a}.\vec{b} = 25 - \frac{27}{2} = \frac{23}{2}$. Chọn d.

$\boxed{29}$ Do $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$. Vậy $\sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2} = \vec{a}$. Chọn c.

$\boxed{30}$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos A$



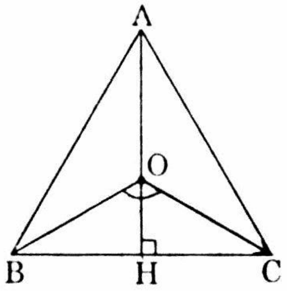
$= AB.AC.\frac{CA}{AB} = b^2$.

Chọn b.

31 $BC^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow\quad 49 = 64 + 25 - 2\,\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$

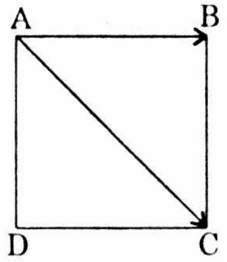
$\Rightarrow\quad 2\,\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 89 - 49 = 40$. Chọn d.



32 $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = OB.OC.\cos 120^0$

$$= \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 . \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-a^2}{6}.$$

Chọn a.



33 $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}).(2\,\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC}(2\,\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$

$$= 2\,\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{AB}$$

$$= 2BC^2 - 0 = 2a^2.$$

Chọn d.

34 Chú ý ΔABC vuông tại A nên $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC} > 0 \\ \overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CB} > 0 \end{cases}$ (B và C nhọn)

$0 = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} < \overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC}$. → a đúng.

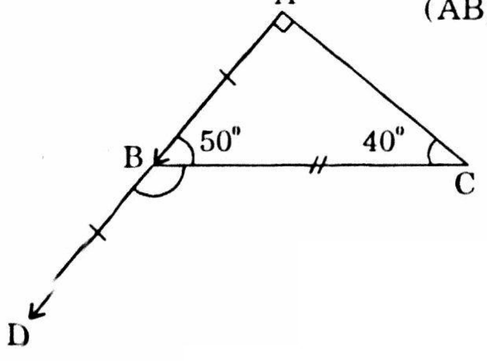
$\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{CB} = -\,\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CB} < 0 < \overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CB}$. → b đúng.

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC} = -\,\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC} < 0 < \overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CB}$. → c đúng.

$\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CB} > 0$

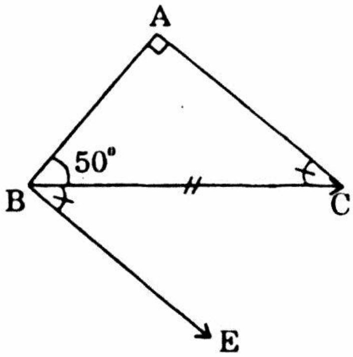
mà $\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{AB} = -\,\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BA} < 0$. → d sai.

35 ΔABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 50^0$.

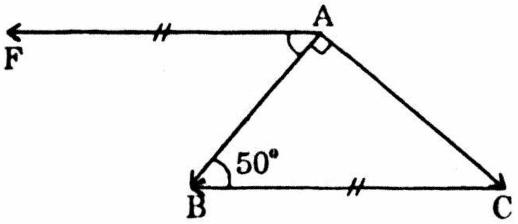


$(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BD};\ \overrightarrow{BC}) = \widehat{DBC} = 130^0$ nên a đúng.

$(\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BE}) = 40^0$. → b đúng.



$(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CB}) = \widehat{FAB} = 50^0$. → c đúng.

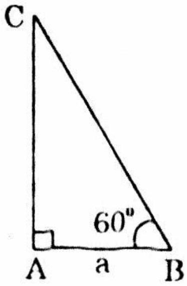


$(\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AF}) = \widehat{FAC} = 140^0$. → d sai.

36 $\mathrm{tg}60^0 = \dfrac{AC}{AB} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad AC = a\sqrt{3}$ và $BC = 2a$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = -CA.CB.\cos\widehat{ACB} = -(a\sqrt{3})(2a)\cos 30^0$$

$$= -2a^2\sqrt{3}.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a^2.$$



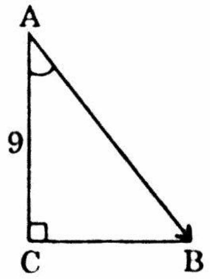
Chọn b.

37 $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB.AC.\cos\widehat{CAB}$

$$= -AB.AC.\left(\frac{AC}{AB}\right)$$

$$= -AC^2 = -81.$$

Chọn d.



Bài 2 TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ VÀ ĐIỂM

- *Trên mặt phẳng Oxy cho* $\vec{a} = (a_1, a_2)$ *và* $\vec{b} = (b_1, b_2)$.

* $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$

* $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2)$

* $k\vec{a} = (ka_1, ka_2) \quad (k \in R)$

* $\vec{a}$ *cùng phương* $\vec{b} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_1b_2 = a_2b_1$

* $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2$

Chú ý : $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$; $\vec{a}^2 = \vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2$

Hệ quả : $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

- *Trên mặt phẳng Oxy cho* $A(x_A, y_A)$; $B(x_B, y_B)$; $C(x_C, y_C)$ *thì :*

* $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$

* $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

* *M chia đoạn AB theo tỷ số* $k \neq +1$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \end{cases}$$

* *I trung điểm của đoạn AB* $\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

* *G trọng tâm* $\Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$

* *Nếu* $\overrightarrow{AB} = (a_1, a_2)$; $\overrightarrow{AC} = (b_1, b_2)$

$Dt(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}\right\|$.

Tất cả các bài tập trong phần 1 đều trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

BÀI TẬP

Bài 1. *Tuyển sinh Đại học khối D 2004*

Cho A(−1, 0); B(4, 0); C(0, m). Gọi G là trọng tâm ΔABC. Tìm m để ΔGAB vuông tại G.

GIẢI

Ta có : $G\begin{cases} x_G = \dfrac{-1+4}{3} = 1 \\ y_G = \dfrac{m}{3} \end{cases}$

Vậy : $\overrightarrow{GA} = \left(-2, \dfrac{-m}{3}\right)$ và $\overrightarrow{GB} = \left(3, \dfrac{-m}{3}\right)$

Tam giác GAB vuông tại G $\Leftrightarrow$ $GA \perp GB$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = 0$

$\Leftrightarrow$ $-6 + \dfrac{m^2}{9} = 0$

$\Leftrightarrow$ $m^2 = 54$ $\Leftrightarrow$ $m = \pm 3\sqrt{6}$. ■

Bài 2. *Tuyển sinh Đại học khối A 2004*

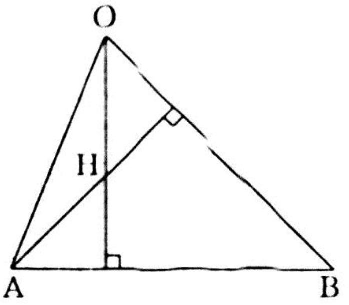
Cho A(0, 2); B($-\sqrt{3}$, −1). Tìm trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABO.

GIẢI

- H trực tâm ΔABC $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OH} = (x_H, y_H) \perp \overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3}, -3) \\ \overrightarrow{AH} = (x_H, y_H - 2) \perp \overrightarrow{OB} = (-\sqrt{3}, -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}x_H - 3y_H = 0 \\ -\sqrt{3}x_H - y_H + 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \sqrt{3} \\ y_H = -1 \end{cases}$



Vậy $H(\sqrt{3}, -1)$.

- I là tâm đường tròn (ABO) $\Leftrightarrow$ IA = IB = IO

$\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IO^2 \\ IB^2 = IO^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I^2 + (y_I - 2)^2 = x_I^2 + y_I^2 \\ (x_I + \sqrt{3})^2 + (y_I + 1)^2 = x_I^2 + y_I^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4y_I + 4 = 0 \\ 2\sqrt{3}x_I + 2y_I + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = -\sqrt{3} \\ y_I = 1 \end{cases}$

Vậy $I(-\sqrt{3}, 1)$. ■

Bài 3. *Dự bị khối A 2003*

Tìm M, N $\in$ (P) : $y^2 = x$. Biết I(0, 2) và $\overrightarrow{IM} = 4\,\overrightarrow{IN}$.

GIẢI

Gọi $M(m^2, m)$ và $N(n^2, n) \in (P)$.

Ta có $\overrightarrow{IM} = 4\,\overrightarrow{IN} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 0 = 4(n^2 - 0) \\ m - 2 = 4(n - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2n \\ m = 4n - 6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2n \\ 2n = 4n - 6 \end{cases} \vee \begin{cases} m = -2n \\ 2n = 4n - 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ n = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} m = -2 \\ n = 1 \end{cases}$$

Vậy $M_1(36, 6)$; $N_1(9, 3)$ hay $M_2(4, -2)$; $N_2(1, 1)$. ■

Bài 4. *Tuyển sinh Đại học khối A 2002*

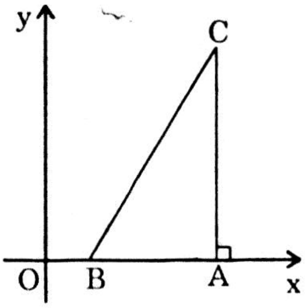
Cho ΔABC vuông tại A, phương trình cạnh BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, A và B nằm trên trục hoành, bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm ΔABC.

GIẢI

Gọi $A(a, 0) \in x'Ox$.

Do B là giao điểm của BC và trục hoành nên B(1, 0).

Ta có $x_C = x_A = a$ và C thuộc (BC) nên $C(a, \sqrt{3}a - \sqrt{3})$. Vậy trọng tâm G của ΔABC là $G\left(\dfrac{2a + 1}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}(a - 1)\right)$



Ta có $AB = |a - 1|$, $AC = \sqrt{3}\,|a - 1|$,

$BC = 2|a - 1|$

Ta có : $S_{\Delta ABC} = pr$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}(AB + AC + BC).2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\,|a - 1|^2 = (3 + \sqrt{3})\,|a - 1|.2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\,|a - 1| = 2(3 + \sqrt{3}) \quad (A \neq B \text{ nên } a \neq 1)$$

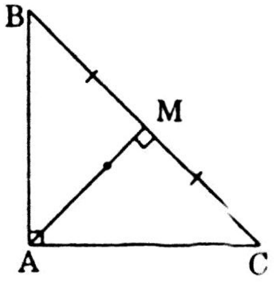
$$\Leftrightarrow a - 1 = \pm 2(\sqrt{3} + 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2\sqrt{3} + 3 \\ a = -2\sqrt{3} - 1 \end{array}\right.$$

Vậy $G\left(\dfrac{7 + 4\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2}{3}\sqrt{3}(\sqrt{3} + 2)\right)$ hay $G\left(\dfrac{-4\sqrt{3} - 1}{3}, \dfrac{-2\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3} + 1)\right)$. ■

Bài 5. *Tuyển sinh Đại học khối B 2003*

Cho ΔABC vuông cân tại A với $M(1, 1)$ là trung điểm BC và $G\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ là trọng tâm ΔABC. Tìm tọa độ A, B, C.

GIẢI



- G trọng tâm ΔABC $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} - x_A = 2\left(\frac{1}{3}\right) \\ 0 - y_A = 2(1) \end{cases}$$

Vậy $A(0, -2)$.

- ΔABC cân nên trung tuyến AM còn là đường cao nên $\overrightarrow{AM} = (1, 3)$ vuông góc $\overrightarrow{BM} = (1 - x_B, 1 - y_B)$

Do đó $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow 1(1 - x_B) + 3(1 - y_B) = 0$

$\Leftrightarrow x_B = 4 - 3y_B$ (1)

Mặt khác ΔABC vuông có AM là trung tuyến nên $AM = BM$

Vậy $1 + 9 = (1 - x_B)^2 + (1 - y_B)^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $(-3 + 3y_B)^2 + (1 - y_B)^2 = 10$

$\Leftrightarrow 10(y_B - 1)^2 = 10 \Leftrightarrow y_B - 1 = 1 \vee y_B - 1 = -1$

$\Leftrightarrow y_B = 2 \vee y_B = 0$

Vậy $B_1(-2, 2)$ hay $B_2(4, 0)$.

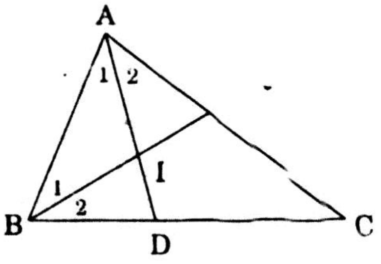
Do M là trung điểm BC nên $\begin{cases} x_C = 2x_M - x_B \\ y_C = 2y_M - y_B \end{cases}$

Khi $B_1(-2, 2)$ thì $C_1(4, 0)$ và $B_2(4, 0)$ thì $C_2(-2, 2)$. ■

Bài 6. Trên mặt phẳng Oxy cho $A(1, 5)$; $B(-4, -5)$; $C(4, -1)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp của ΔABC.

GIẢI

Gọi D là chân đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$.



Ta có : $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{25 + 100}}{\sqrt{9 + 36}} = \frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{5}{3}$

Mà D nằm giữa hai điểm B và C nên :

$$\overrightarrow{DB} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 - x_D = -\frac{5}{3}(4 - x_D) \\ -5 - y_D = -\frac{5}{3}(-1 - y_D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Vẽ đường phân giác trong của $\widehat{ABC}$ cắt AD tại I.

Xét ΔABD ta có : $\frac{IA}{ID} = \frac{AB}{BD} = \frac{5\sqrt{5}}{\frac{5}{2}\sqrt{5}} = 2$

Mà I nằm giữa A và D nên :

$$\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_I = -2(1 - x_I) \\ 5 - y_I = -2\left(-\frac{5}{2} - y_I\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 1 \\ y_I = 0 \end{cases}$$

Vậy I(1, 0) là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. ■

Bài 7. Trên mặt phẳng Oxy cho A(–1, 2); B(2, 0); C(–3, 1).

a) Xác định tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

b) Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng BC sao cho diện tích ΔABM bằng $\frac{1}{3}$ diện tích ΔABC.

GIẢI

a) I(a, b) là tâm đường tròn (ABC) ⇔ IA = IB = IC

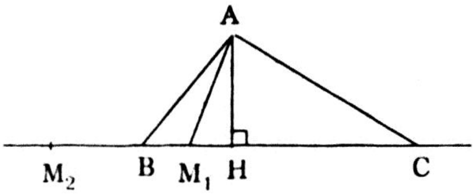
$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2 + (b-2)^2 = (a-2)^2 + b^2 \\ (a+1)^2 + (b-2)^2 = (a+3)^2 + (b-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 4b + 5 = -4a + 4 \\ 2a - 4b + 5 = 6a - 2b + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 4b = -1 \\ 8a + 2b = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{11}{14} \\ b = -\frac{13}{4} \end{cases} \quad \text{Vậy } I\left(-\frac{11}{14}, -\frac{13}{4}\right).$$

b) Lấy M thuộc đường thẳng BC. Vẽ AH ⊥ BC.

Ta có : $S_{(\Delta ABM)} = \frac{1}{3} S_{(\Delta ABC)}$



$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AH.BM = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.AH.BC$$

$$\Leftrightarrow BC = 3BM$$

Do B, C, M thẳng hàng ta được $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BM}$ hay $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{BM}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 = 3(x_M - 2) \\ 1 = 3(y_M - 0) \end{cases} \vee \begin{cases} -5 = -3(x_M - 2) \\ 1 = -3(y_M - 0) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{1}{3} \\ y_M = \dfrac{1}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x_M = \dfrac{11}{3} \\ y_M = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Do đó có hai điểm M cần tìm : $M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ hay $M'\left(\frac{11}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. ■

Bài 8. *Tuyển sinh khối A 2005*

Tìm tọa độ 4 đỉnh hình vuông ABCD.

Biết $A \in d_1 : x - y = 0$; $C \in d_2 : 2x + y - 1 = 0$; B và D đều nằm trên trục hoành.

GIẢI

Gọi $A(a, a) \in d_1$.

Do hai đường chéo hình vuông vuông góc với nhau tại trung điểm

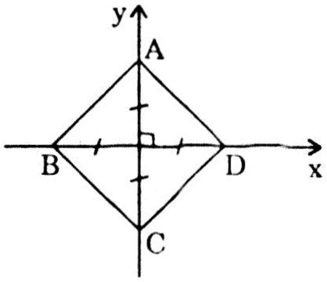
Mà $B, D \in x'Ox$ nên A và C đối xứng qua x'Ox

nên $x_C = x_A = a$ và $y_C = -y_A = -a$.

Mà $C \in d_2 \Rightarrow 2a - a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

Vậy A(1, 1); C(1, −1).

Gọi $B(b, 0) \in x'Ox$.



Do $AB \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (b - 1, -1) \perp \overrightarrow{BC} = (1 - b, -1)$

$\Rightarrow -(b - 1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow b - 1 = \pm 1$

$\Rightarrow b = 0 \vee b = 2$

Vậy $B_1(0, 0)$ hay $B_2(2, 0)$.

Trung điểm của AC là I(1, 0).

Do I trung điểm BD $\Rightarrow$ $B_1(0, 0)$ thì $C_1(2, 0)$.

$B_2(2, 0)$ thì $C_2(0, 0)$. ■

Bài 9. *Tuyển sinh Đại học khối B 2007*

Cho A(2, 2). Tìm B trên $d_1 : x + y - 2 = 0$ và C trên $d_2 : x + y - 8 = 0$ sao cho ΔABC vuông cân tại A.

GIẢI

Gọi $B(b, 2 - b)$ và $C(c, 8 - c) \in d_2$.

ΔABC vuông cân tại A $\Leftrightarrow \begin{cases} AB \perp AC \\ AB = AC \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(b-2)(c-2)-b(6-c)=0\\(b-2)^2+b^2=(c-2)^2+(6-c)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(b-1)(c-4)=2\\(b-1)^2+1=(c-4)^2+4\end{cases}$$

Đặt $x = b - 1$ và $y = c - 4$, ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases}xy=2\\x^2=y^2+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{2}{x}\\x^2=\dfrac{4}{x^2}+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{2}{x}\\x^4-3x^2-4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{2}{x}\\x^2=-1 \vee x^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=1\end{cases} \vee \begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$$

Vậy $\begin{cases}b-1=2\\c-4=1\end{cases} \vee \begin{cases}b-1=-2\\c-4=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=3\\c=5\end{cases} \vee \begin{cases}b=-1\\c=3\end{cases}$

Do đó $B(3, -1)$; $C(5, 3)$ hay $B(-1, 3)$; $C(3, 5)$. ■

Bài 10. Trên mặt phẳng Oxy cho $A(1, -2)$; $B(3, 4)$.

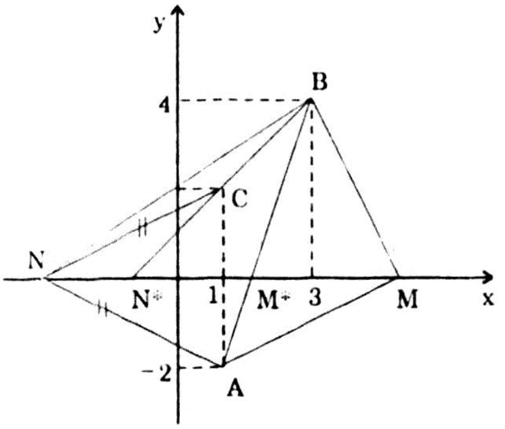
a) Tìm tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho tổng các khoảng cách từ M đến 2 điểm A, B là ngắn nhất.

b) Tìm tọa độ điểm N trên trục hoành sao cho $|NA - NB|$ dài nhất.

c) Tìm tọa độ điểm I trên trục tung sao cho $IA + IB$ ngắn nhất.

d) Tìm tọa độ điểm J trên trục tung sao cho $|\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}|$ ngắn nhất.

GIẢI



a) Gọi $M(m, 0) \in x'Ox$.

Do : $y_A.y_B < 0$ nên A và B nằm về 2 phía đối với Ox.

Ta có : $MA + MB \geq AB = \sqrt{40}$

Dấu "=" xảy ra

$\Leftrightarrow$ M nằm giữa 2 điểm A và B.

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{BM} = (m - 3, -4)$ cùng hướng $\overrightarrow{BA} = (-2, -6)$

$$\Leftrightarrow \frac{m-3}{-2} = \frac{-4}{-6} \Leftrightarrow m = \frac{5}{3}$$

Do đó : $(MA + MB)_{\min} = 2\sqrt{10}$ khi $M\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$.

b) Gọi $N(n, 0) \in x'Ox$ và $C(1, 2)$ là điểm đối xứng của A qua Ox.

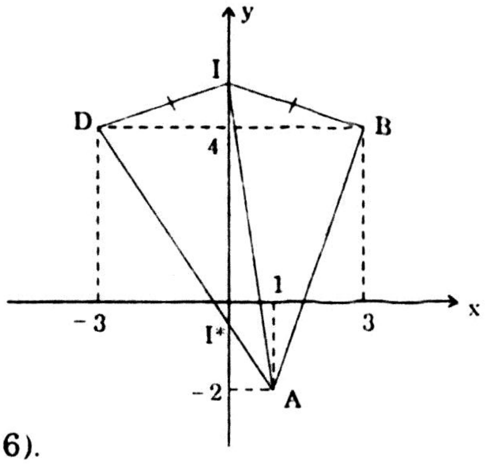
Ta có : $|NA - NB| = |NC - NB| \leq BC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{BN} = (n - 3, -4)$ cùng hướng $\overrightarrow{BC} = (-2, -2)$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{n - 3}{-2} = \dfrac{-4}{-2}$ $\Leftrightarrow$ $n = -1$

Do đó : $|NA - NB|_{max} = 2\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow$ $N(-1, 0)$.

Chú ý **:** Bất đẳng thức $|NA - NB| \leq AB$ vẫn đúng nhưng dấu "=" không xảy ra nên không thể kết luận biểu thức $|NA - NB|$ đạt giá trị lớn nhất.



c) Gọi $I(0, i) \in y'Oy$.

Do : $x_A x_B = 3 > 0$ nên A và B nằm cùng phía đối với Oy.

Gọi $D(-3, 4)$ là điểm đối xứng của B qua Oy.

Ta có : $IA + IB = IA + ID \geq AD = 2\sqrt{13}$

Dấu "=" xảy ra

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AI} = (-1, i + 2)$ cùng hướng $\overrightarrow{AD} = (-4, 6)$.

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{-1}{-4} = \dfrac{i + 2}{6}$ $\Leftrightarrow$ $i = -\dfrac{1}{2}$

Do đó : $(IA + IB)_{min} = 2\sqrt{13}$ khi $I\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$.

d) Gọi $J(0, j) \in y'Oy$.

Ta có : $\overrightarrow{JA} = (1, -2 - j)$ và $\overrightarrow{JB} = (3, 4 - j)$

Vậy $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} = (4, 2 - 2j)$. Do đó $|\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}|^2 = 16 + (2 - 2j)^2 \geq 16$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $2 - 2j = 0$ $\Leftrightarrow$ $j = 1$

Do đó : $|\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}|_{min} = 4$ khi $J(0, 1)$. ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. Cho A(10, 5); B(15, –5); D(–20, 0) là 3 đỉnh của hình thang cân ABCD (AB // CD). Tìm tọa độ đỉnh C ?

BT2. Cho A(1, –2); B(–3, 3). Tìm C nằm trên đường thẳng (d) : $x - y + 2 = 0$ sao cho ΔABC vuông tại C.

BT3. Trên mặt phẳng Oxy cho A(5, 4); B(–1, 1); C(3, –2).

a) Tìm tọa độ trọng tâm G, trực tâm H, tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

b) Gọi AD là đường kính của đường tròn (ABC). Chứng minh $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$ và BHCD là hình bình hành.

c) Tìm M trên trục hoành sao cho : * $|MA - MB|$ dài nhất;

* $(MA + MB)$ ngắn nhất.

d) Tìm N nằm trên đường thẳng AB sao cho $|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC}|$ ngắn nhất.

BT4. Cho A(1, 1), B nằm trên đường thẳng $y = 3$ và C nằm trên trục hoành. Tìm tọa độ điểm B và C sao cho ΔABC là tam giác đều.

BT5. Tìm quỹ tích điểm M sao cho khoảng cách từ M đến A(1, 2) và khoảng cách từ M đến Ox luôn bằng nhau.

BT6. Cho A(5, 4); B(−1, 1); C(3, −2).

Cho M là điểm di động sao cho $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, α, β là 2 số thực thay đổi với $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|$ ngắn nhất.

BT7. Chứng minh :

a) $|3x^2 + 8x - 3| \leq 5(x^2 + 1)$.

b) $\sqrt{x^2 + 4y^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 4y^2 - 2x - 12y + 10} \geq 5$

c) $\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}$.

30 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

$\boxed{1}$ Cho OABC là hình bình hành với $C \in x'Ox$. Kết luận nào sau đây là đúng :

a) $\overrightarrow{AB}$ có tung độ $\neq 0$

b) $y_A \neq y_B$

c) $x_C = 0$

d) $x_A + x_C = x_B$.

$\boxed{2}$ Cho $\vec{u} = (3, -2)$; $\vec{v} = (1, 6)$. Kết luận nào sau đây là đúng :

a) $\vec{u} + \vec{v}$ ngược hướng $\vec{a} = (-4, 4)$.

b) $\vec{u}$ cùng phương $\vec{v}$.

c) $\vec{u} - \vec{v}$ cùng hướng $\vec{b} = (1, -4)$.

d) $2\vec{u} + \vec{v}$ cùng phương $\vec{v}$.

$\boxed{3}$ Cho $\vec{a} = (1, 2)$; $\vec{b} = (2, 3)$; $\vec{c} = (-6, -10)$. Hãy chọn kết quả đúng :

a) $\vec{a} + \vec{b}$ cùng hướng $\vec{c}$.

b) $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - \vec{b}$ cùng phương.

c) $\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{c}$ cùng hướng. d) $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{c}$ ngược hướng.

4 Cho A(0, 3); B(1, 5); C(−3, −3). Kết luận nào sau đây là đúng :

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng. b) A nằm giữa B và C.

c) B nằm giữa A và C. d) C nằm giữa A và B.

5 Cho A(−2, 3); B(0, 4); C(5, −4). Tứ giác ABCD là hình bình hành khi :

a) D(3, −5) b) D(3, 7) c) D(7, 5) d) D(−7, 5).

6 ΔABC có trọng tâm G(1, 2), A(−3, 5), B(1, 2) thì tọa độ C là :

a) C(5, 1) b) C(−5, 1) c) C(5, −1) d) C(−5, −1).

7 Cho ΔABC có M(1, −1); N(3, 2); P(0, −5) lần lượt là trung điểm BC, CA và AB thì tọa độ A là :

a) A(2, 2) b) A(5, 1) c) A(1, −2) d) A(2, −2).

8 Cho $\vec{a} = (-2, -1)$; $\vec{b} = (3, -1)$. Góc của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là :

a) 45^0 b) 135^0 c) 30^0 d) 150^0.

9 Cho A(1, 2); B(3, 4) vectơ đơn vị cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ là :

a) (1, 1) b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ c) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ d) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

10 Cho ΔABC có trung điểm của BC là M(1, 1), trọng tâm tam giác là G(2, 3) thì tọa độ A là :

a) (3, 5) b) (4, 5) c) (4, 7) d) (2, 4).

11 Cho ΔABC có A(−1, 1); B(1, 3); C(1, −1). Kết luận nào sau đây là đúng :

a) ΔABC đều. b) ΔABC có 3 góc nhọn.

c) ΔABC cân tại B. d) ΔABC vuông cân tại A.

12 ΔABC có A(10, 5); B(3, 2); C(6, −5). Kết luận nào sau đây là đúng :

a) ΔABC vuông tại B. b) ΔABC vuông cân tại B.

c) ΔABC vuông cân tại A. d) ΔABC có $\widehat{BAC}$ tù.

13 Cho ΔABC có A(−1, −1); B(3, 1); C(6, 0). Thì $\widehat{ABC}$ bằng :

a) 45^0 b) 60^0 c) 120^0 d) 135^0.

14 Cho ΔABC có A(−3, 6); B(9, −10); C(−5, 4) thì tọa độ trực tâm ΔABC là :

a) (3, 5) b) (2, 4) c) (−5, 4) d((2, 0).

15 Cho A(1, 2); B(−3, 3); M(m + 2; 2). Để ΔAMB vuông tại M thì :

a) m = −1
b) m = −5
c) Hai kết quả a, b đều đúng.
d) Hai kết quả a, b đều sai.

16 Cho A(−1, 3); B(2, 1). Tìm tọa độ N sao cho $\overrightarrow{NB} = -2\overrightarrow{AB}$ thì :

a) N(8, 3)
b) N(8, −3)
c) N(−8, 3)
d) N(−8, −3).

17 Cho A(0, 1), B(−1, −2), C(1, 5), D(−1, −1). Kết luận nào sau đây là đúng :

a) A, B, C thẳng hàng.
b) A, B, D thẳng hàng.
c) AB // CD
d) AB // BC.

18 ΔOAB có A(0, 2); B(3, 1) thì tọa độ trực tâm H của ΔOAB là :

a) $H\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
b) $H\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$
c) $H\left(\frac{1}{3}, -1\right)$
d) $H\left(-\frac{1}{3}, -1\right)$.

19 Cho tứ giác ABCD có A(2, 4); B(1, 2); C(3, 1); D(6, 2) thì ABCD là hình :

a) thang
b) thang cân
c) thang vuông
d) hình chữ nhật.

20 Cho A(0, 3); B(−4, −1); C(4, −1) thì ΔABC là tam giác :

a) vuông
b) cân
c) vuông cân
d) đều.

21 ΔABC có C(−2, −4), trọng tâm G(0, 4) và M(2, 0) là trung điểm BC thì tọa độ A và B là :

a) (6, 4) và (4, 12)
b) (−6, 4) và (4, 12)
c) (−4, 12) và (6, 4)
d) Các kết quả a, b, c đều sai.

22 Cho A(1, −2) và B nằm trên tia Ox. Biết rằng đường trung trực của AB qua O thì :

a) $B(\sqrt{5}, 0)$
b) $B(-\sqrt{5}, 0)$
c) $B(0, \sqrt{5})$
d) B(5, 0).

23 Cho A(1, −1); B(2, 0); C(0, 1) thì diện tích ΔABC bằng :

a) $-\frac{3}{2}$
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{1}{2}$
d) 1.

24 Cho A(1, 1); B(3, −1); C(7, −1); D(4, 2) thì diện tích ABCD bằng :

a) 7
b) 12
c) 10
d) 16.

- ***Cho A(1, 1); B(0, 2), O(0, 0). Hãy trả lời các câu 25, 26, 27, 28.***

25 Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là :

a) (0, 1)
b) (0, −1)
c) (1, 0)
d) (−1, 0).

26 Trực tâm của ΔOAB là :

a) (1, −1) b) (−1, 1) c) (1, 1) d) (−1, −1).

27 Bán kính đường tròn nội tiếp ΔOAB bằng :

a) $\sqrt{2} + 1$ b) $\sqrt{2} - 1$ c) 1 d) $\sqrt{2}$.

28 Tâm đường tròn nội tiếp ΔOAB là :

a) (1, −1) b) $(\sqrt{2} - 1, -1)$ c) $(\sqrt{2}, 1)$ d) $(\sqrt{2} - 1, 1)$.

29 A(5, 4); B(3, −2). Lấy M trên trục hoành.

Giá trị nhỏ nhất của $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ là :

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3.

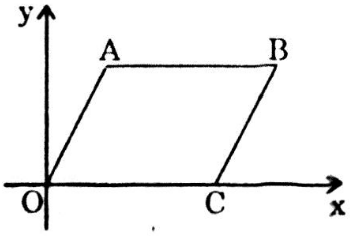
30 Cho A(−1, 1); B(2, 3). Gọi N trên trục tung, NA + NB ngắn nhất khi :

a) $N\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ b) $N\left(0, \frac{5}{3}\right)$ c) $N\left(0, \frac{3}{5}\right)$

d) Ba kết quả a, b, c đều sai.

TRẢ LỜI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Dĩ nhiên a, b, c sai.



Do $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$

⇒ $x_A = x_B - x_C$

⇒ $x_A + x_C = x_B$. Chọn d.

2 $\vec{u} + \vec{v} = (4, 4)$ ngược hướng (−4, 4). → a sai.

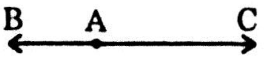
b) dĩ nhiên sai.

$\vec{u} - \vec{v} = (2, -8)$ cùng hướng (1, −4). → c đúng.

$2\vec{u} + \vec{v} = (7, 2)$ cùng phương $\vec{v} = (1, 6)$. d sai.

3 $\vec{a} + \vec{b} = (3, 5) = -\frac{1}{2}\vec{c} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{c}$ ngược hướng nên d đúng.

4 $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$; $\overrightarrow{AC} = (-3, -6)$

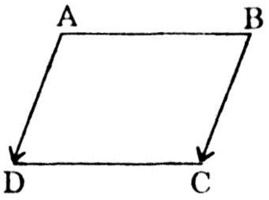


$\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$ nên a sai.

⇒ A, B, C thẳng hàng và A nằm giữa B, C nên b đúng.

$\boxed{5}$ ABCD hình bình hành $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

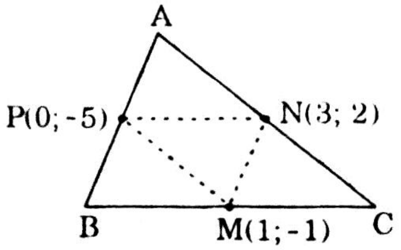
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = 5 \\ y_D - 3 = -8 \end{cases}$$



Vậy D(3, −5). Chọn a.

$\boxed{6}$ $\begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B = 3 + 3 - 1 = 5 \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B = 6 - 5 - 2 = -1 \end{cases}$. Chọn c.

$\boxed{7}$ $\overrightarrow{NM} = (-2, -3)$ và $\overrightarrow{PM} = (1, 4)$.



Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$

$$\Rightarrow 2(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{PM}) = 2\overrightarrow{AM}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 = 1 - x_A \\ 1 = -1 - y_A \end{cases} \Rightarrow \text{A}(2, -2). \text{ Chọn d.}$$

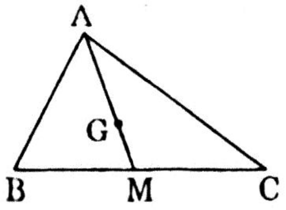
$\boxed{8}$ $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{-6+1}{\sqrt{5}.\sqrt{10}} = \dfrac{-5}{5\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b}) = 135^0$. Chọn b.

$\boxed{9}$ A(1, 2); B(3, 4) nên $\overrightarrow{AB} = (2, 2)$.

Các vectơ của a, b, c, d đều cùng phương $\overrightarrow{AB}$ nhưng chỉ có vectơ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ có độ dài 1. Chọn d.

$\boxed{10}$ Ta có : $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$ $\Rightarrow \begin{cases} 2 - x_A = 2(-1) \\ 3 - y_A = 2(-2) \end{cases}$

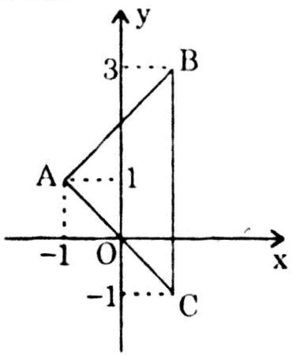
$\Rightarrow$ A(4, 7). Chọn c.



$\boxed{11}$ $\overrightarrow{AB} = (2, 2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$; $\overrightarrow{AC} = (2, -2) \Rightarrow AC = 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{BC} = (0, -4) \Rightarrow BC = 4$. Vậy ΔABC vuông cân tại A. Chọn d.

Chú ý : Có thể dùng hình vẽ.



$\boxed{12}$ $\overrightarrow{BA} = (7, 3) \Rightarrow BA^2 = 58$; $\overrightarrow{BC} = (3, -7) \Rightarrow BC^2 = 58$

và $\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{BC} = 0$

ΔBAC vuông cân tại B. Chọn b.

$\boxed{13}$ Ta có : $\overrightarrow{BA} = (4, 2)$; $\overrightarrow{BC} = (3, -1)$

$$\Rightarrow \cos\widehat{ABC} = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BA.BC} = \frac{12-2}{\sqrt{20}.\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{ABC} = 45^0.$$ Chọn a.

$\boxed{14}$ Ta có : $\overrightarrow{AB} = (12, -16)$; $\overrightarrow{AC} = (-2, -2)$; $\overrightarrow{BC} = (-14, 14)$

Do $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

Trực tâm $H \equiv C$. Chọn c.

$\boxed{15}$ $\overrightarrow{MA} = (m + 1; 0)$, $\overrightarrow{MB} = (m + 5; -1)$

$\Delta AMB \perp$ tại M $\Leftrightarrow (m + 1)(m + 5) = 0$

Chọn c : $m = -1 \vee m = -5$.

$\boxed{16}$ $\overrightarrow{NB} = -2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x_N = -2(3) \\ 1 - y_N = -2(-2) \end{cases}$. Vậy N(8, –3). Chọn b.

$\boxed{17}$ $\overrightarrow{AB} = (-1, -3)$; $\overrightarrow{AC} = (1, 4)$; $\overrightarrow{AD} = (-1, -2)$.

Kết luận a, b sai.

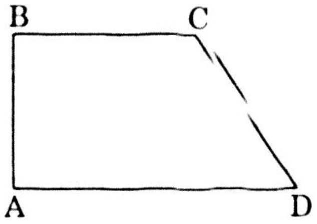
$\overrightarrow{CD} = (-2, -6) = 2\overrightarrow{AB}$ nên CD // AB $\Rightarrow$ c đúng.

$\boxed{18}$ H trực tâm $\Delta OBA \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OH} = (x; y) \perp \overrightarrow{AB} = (3; -1) \\ \overrightarrow{AH} = (x; y - 2) \perp \overrightarrow{OB} = (3; 1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 0 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = 1 \end{cases}.$$ Chọn a.

$\boxed{19}$ $\overrightarrow{AD} = (4, -2) = 2\overrightarrow{BC} = 2(2, -1) \Rightarrow$ AD // BC

ABCD hình chữ nhật (d sai).



$\overrightarrow{AB} = (-1, -2)$

$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AD} = 0 \Rightarrow AB \perp AD$

ABCD hình thang vuông. Chọn c đúng.

$\boxed{20}$ $AB^2 = 32, \quad AC^2 = 32, \quad BC^2 = 64$

Do $AB = AC$ và $BC^2 = AB^2 + AC^2$ nên ΔABC vuông cân. Chọn c.

$\boxed{21}$ M trung điểm BC $\Rightarrow$ $\begin{cases} x_B = 2x_M - x_C = 4 + 2 = 6 \\ y_B = 2x_M - x_C = 0 + 4 = 4 \end{cases}$

G trọng tâm ΔABC $\Rightarrow$ $\begin{cases} x_A = 3x_G - x_B - x_C = 0 - 6 + 2 = -4 \\ y_A = 3y_G - y_B - y_C = 12 - 4 + 4 = 12 \end{cases}$

Chọn c.

$\boxed{22}$ $A(1, -2)$; $B(b, 0) \in Ox$ $(b > 0)$

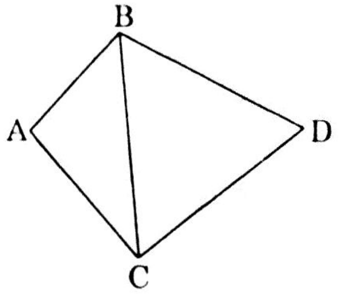
Ta có : $OA^2 = OB^2 \quad \Leftrightarrow \quad 5 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad b = \sqrt{5}$. Chọn a.

$\boxed{23}$ $A(1, -1)$; $B(2, 0)$; $C(0, 1)$

$\overrightarrow{AB} = (1, 1)$ và $\overrightarrow{AC} = (-1, 2)$

$Dt\,(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix}\right\| = \frac{3}{2}$. Chọn b.

$\boxed{24}$ $\overrightarrow{BA} = (-2, 2)$; $\overrightarrow{BC} = (4, 0)$; $\overrightarrow{BD} = (1, 3)$.

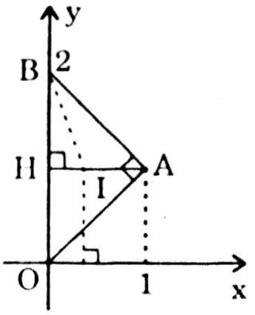


$Dt\,(ABCD) = Dt\,(ABC) + Dt\,(BDC)$

$= \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} -2 & 2 \\ 4 & 0 \end{matrix}\right\| + \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{matrix}\right\|$

$= 4 + 6 = 10$. Chọn c.

$\boxed{25}$ Tâm đường tròn (OAB) là trung điểm OB, đó là (0, 1). Chọn a.



$\boxed{26}$ Trực tâm là $H \equiv A(1, 1)$. Chọn a.

$\boxed{27}$ $S = Dt(\Delta ABO) = \frac{1}{2}AB.OA = \frac{1}{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2} = 1$

$p = \frac{1}{2}(AB + OA + OB) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2\right) = \sqrt{2} + 1$

Mà $S = pr \quad \Rightarrow \quad r = \frac{S}{p} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$. Chọn b.

$\boxed{28}$ ΔOAB vuông cân tại A.

Vậy AH là phân giác trong $\widehat{BAO} \Rightarrow y_I = 1$.

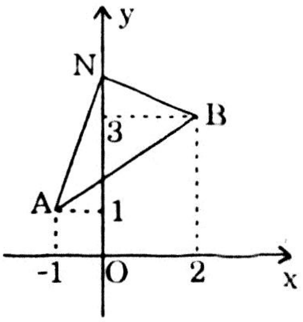
Mặt khác $x_I = IH = r = \sqrt{2} - 1$.

Vậy $I\left(\sqrt{2} - 1, 1\right)$. Chọn d.

29 Trung điểm AB là I(4, 1). Gọi M(m, 0) $\in$ x'Ox.

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = 2|\overrightarrow{MI}| = 2\sqrt{(m-4)^2 + 1} \geq 2.$$ Chọn c.

30 Gọi N(0, n) $\in$ y'Oy



Ta có : $NA + NB \geq AB = \sqrt{9+4}$

$\overrightarrow{AN} = (1, n-1)$

$\overrightarrow{NB} = (2, 3-n)$

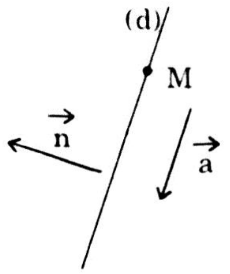
$(NA + NB)_{\min} = \sqrt{13}$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AN}$ cùng hướng $\overrightarrow{NB}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{n-1}{3-n} \Leftrightarrow 3 - n = 2n - 2 \Leftrightarrow n = \dfrac{5}{3}$. Chọn b.

Bài 3 ĐƯỜNG THẲNG

Vấn đề 1 : VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG



1. *Đường thẳng qua $M(x_o, y_o)$ và có vectơ chỉ phương (VTCP) $\vec{a} = (a_1, a_2)$ thì có :*

- *Phương trình tham số là :* $\begin{cases} x = x_o + ta_1 \\ y = y_o + ta_2 \end{cases}$ $(t \in R)$

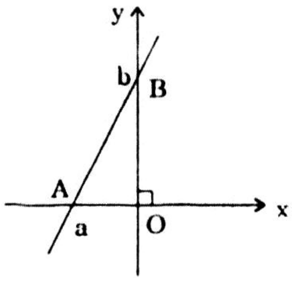
- *Phương trình chính tắc là :* $\boxed{\dfrac{x - x_o}{a_1} = \dfrac{y - y_o}{a_2}}$

2. *Phương trình dạng : $Ax + By + C = 0$ với $A^2 + B^2 > 0$ là phương trình tổng quát của đường thẳng. Đường thẳng này có pháp vectơ $\vec{n} = (A, B)$.*

Hệ quả :

a) *Phương trình đường thẳng qua $M(x_o, y_o)$ và có pháp vectơ $\vec{n} = (A, B)$:*

$$\boxed{A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0}$$



b) *Phương trình đường thẳng qua $A(a, 0)$; $B(0, b)$:*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (ab \neq 0)$$

Chú ý :

* *Nếu (d) có VTCP $\vec{a} = (a_1, a_2)$ với $a_1 \neq 0$ thì (d) có hệ số góc $k = \dfrac{a_2}{a_1}$.*

* *Cho (d) : $Ax + By + C = 0$ thì :*

$(d') \,//\, (d)$ có dạng : $Ax + By + C' = 0$, với $C' \neq C$.

$(d'') \perp (d)$ có dạng : $Bx - Ay + C'' = 0$

* *Phương trình chùm đường thẳng qua giao điểm của 2 đường thẳng cắt nhau (d) : $Ax + By + C = 0$ và (d') : $A'x + B'y + C' = 0$ là :*

$$\lambda(Ax + By + C) + \mu(A'x + B'y + C') = 0 \quad (\text{với } \lambda^2 + \mu^2 \neq 0).$$

BÀI TẬP

Bài 1. *Dự bị khối B 2004*

Cho $d_1 : 2x - y + 5 = 0;\quad d_2 : x + y - 3 = 0$.

Viết phương trình đường thẳng qua $I(-2, 0)$, cắt d_1 tại A, cắt d_2 tại B mà $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{IB}$.

GIẢI

Gọi $A(a, 2a + 5) \in d_1$; $\quad B(b, 3 - b) \in d_2$

$$\text{Ta có}\quad \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IB} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} b - a = 2(b + 2) \\ -(2a + 5) + (3 - b) = 2(3 - b - 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} b + a = -4 \\ b - 2a = 8 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a = -4 \\ b = 0 \end{cases}$$

Vậy $A(-4, -3)$; $B(0, 3)$.

AB qua B và có VTCP $\overrightarrow{AB} = (4, 6) = 2(2, 3)$

Phương trình (d) cần tìm : $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y - 3}{3}$. ■

Bài 2. Cho ΔABC có trọng tâm $G(-2, -1)$.

Cạnh (AB) có phương trình : $4x + y + 15 = 0$; (AC) : $2x + 5y + 3 = 0$.

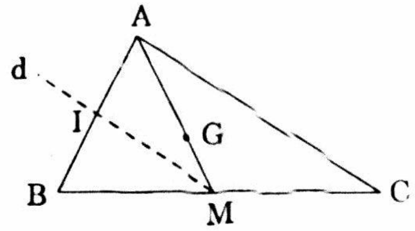
a) Tìm tọa độ đỉnh A và trung điểm M của BC.

b) Tìm tọa độ đỉnh B và phương trình cạnh BC.

GIẢI

a) Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4x + y + 15 = 0 \\ 2x + 5y + 3 = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$$



Vậy $A(-4, 1)$.

Do G là trọng tâm ΔABC nên :

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 2 = 2(x_M + 2) \\ -2 = 2(y_M + 1) \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x_M = -1 \\ y_M = -2 \end{cases}$$

Vậy $M(-1, -2)$.

b) ***Cách 1 :*** Gọi (d) là đường thẳng qua M và // AC

Phương trình (d) : $2(x + 1) + 5(y + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow\quad 2x + 5y + 12 = 0$$

Do (d) là đường trung bình ΔABC nên I là trung điểm AB.

Tọa độ I là nghiệm hệ phương trình : $\begin{cases} 2x + 5y = -12 \\ 4x + y = -15 \end{cases}$

Vậy $I\left(-\frac{7}{2}, -1\right)$.

Từ I trung điểm AB nên : $\begin{cases} x_B = 2x_I - x_A = -7 + 4 = -3 \\ y_B = 2y_I - y_A = -2 - 1 = -3 \end{cases}$

Vậy B(−3, −3).

Đường thẳng BC có $\overrightarrow{BM} = (2, 1)$ là VTCP.

Vậy phương trình BC là : $\frac{x+3}{2} = \frac{y+3}{1} \Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0$.

Cách 2 : Do M là trung điểm BC nên ta có :

$$\begin{cases} x_B + x_C = 2x_M = -2 & (1) \\ y_B + y_C = 2y_M = -4 & (2) \end{cases}$$

Mà $B \in (AB)$ nên $4x_B + y_B = -15$ (3)

$C \in (AC)$ nên $2x_C + 5y_C = -3$ (4)

Từ (1), (2) và (4) $\Rightarrow$ $2x_B + 5y_B = -21$ (5)

Từ (3) và (5) ta được : B(−3, −3)

Vậy (BC) qua M và có VTCP $\overrightarrow{BM} = (2, 1)$

Phương trình chính tắc của BC : $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{1}$. ■

Ghi chú : Cách 2 có ưu điểm không cần vẽ thêm đường phụ. Ta đi tìm tọa độ B, C bằng cách xác định và giải bốn phương trình 4 ẩn số.

Bài 3. Cho P(3, 0) và hai đường thẳng $(d_1) : 2x - y - 2 = 0$

$(d_2) : x + y + 3 = 0$

Gọi (d) là đường thẳng qua P và cắt d_1, d_2 tại A, B sao cho PA = PB. Viết phương trình đường thẳng (d).

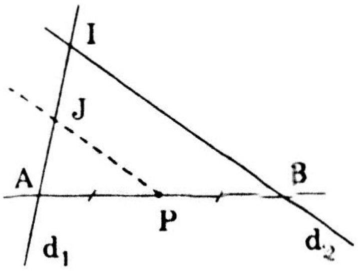
GIẢI

Ta có : $A \in (d_1)$ nên $2x_A - y_A - 2 = 0$ (1)

$B \in (d_2)$ nên $x_B + y_B + 3 = 0$ (2)

Do P là trung điểm AB nên $\begin{cases} x_A + x_B = 2x_P = 6 & (3) \\ y_A + y_B = 2y_P = 0 & (4) \end{cases}$

Vậy ta có hệ phương trình :



$$\begin{cases} 2x_A - y_A = 2 & (1) \\ x_B + y_B = -3 & (2) \\ x_A + x_B = 6 & (3) \\ y_A + y_B = 0 & (4) \end{cases}$$

Từ (2), (3) và (4), ta được :

$$(6 - x_A) + (-y_A) = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x_A + y_A = 9 \qquad (5)$$

Từ (1) và (5), ta có : $A\left(\frac{11}{3}, \frac{16}{3}\right)$.

(d) nhận $\overrightarrow{AP} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{16}{3}\right) = -\frac{2}{3}(1, 8)$ là VTCP.

Vậy phương trình (d) là : $\frac{x-3}{1} = \frac{y-0}{8}$. ■

Ghi chú : Có thể tìm giao điểm I của d_1 và d_2. Viết phương trình đường trung bình PJ của ΔABC. Từ đó tìm được J rồi suy ra tọa độ A do J là trung điểm IA.

Bài 4. Viết phương trình các cạnh của ΔABC biết A(1, 3) và hai đường trung tuyến có phương trình : $(d_1) : y - 1 = 0$ và $(d_2) : x - 2y + 1 = 0$.

GIẢI

Tọa độ trọng tâm G là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases} y = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

Vậy G(1, 1)

Do $A \notin d_1 \cup d_2$. Vậy hai trung tuyến lần lượt qua B và C.

Do $B \in (d_1)$ nên $y_B = 1$ (1)

$C \in (d_2)$ nên $x_C - 2y_C = -1$ (2)

Mặt khác do G là trọng tâm ΔABC nên :

$$\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B + x_C = 3 - 1 = 2 & (3) \\ y_B + y_C = 3 - 3 = 0 & (4) \end{cases}$$

Từ (1), (2), (3) và (4), ta được : B(5, 1) và C(−3, −1)

(AB) qua A và có VTCP là $\overrightarrow{AB} = (4, -2)$, phương trình chính tắc

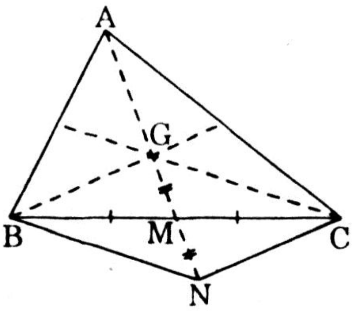
$$(AB) : \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{-2}$$

(AC) qua A và có VTCP $\overrightarrow{AC} = (-4, -4) = -4(1, 1)$, phương trình chính tắc

$$(AC) : \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{1}$$

(BC) qua B và có VTCP $\overrightarrow{BC} = (-8, -2) = -2(4, 1)$,

phương trình chính tắc (BC) : $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y-1}{1}$. ■



Ghi chú : Nếu không giải hệ bốn phương trình ta sẽ làm rất dài ! Gọi N là điểm đối xứng với A qua G thì BGCN là hình bình hành. Vậy phải tìm N, sau đó viết phương trình NC qua N và song song BG. Từ đó tìm được C và B.

Bài 5. Lập phương trình các cạnh của ΔABC biết $B(-4, -5)$ và hai đường cao hạ từ hai đỉnh còn lại có phương trình :

$$5x + 3y - 4 = 0 \quad \text{và} \quad 3x + 8y + 13 = 0.$$

GIẢI

Gọi (AH) : $5x + 3y - 4 = 0$ và (CH) : $3x + 8y + 13 = 0$

- (BC) qua B và vuông góc (AH) nên có PVT $\vec{n} = (3, -5)$

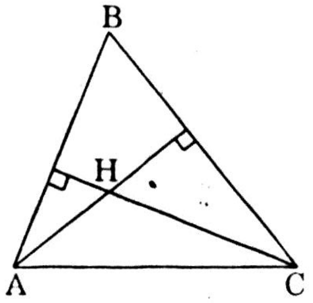
  Phương trình (BC) là : $3(x + 4) - 5(y + 5) = 0 \Leftrightarrow 3x - 5y - 13 = 0$

- (AB) qua B và vuông góc (CH) nên có PVT $\vec{n'} = (8, -3)$

  Phương trình (BA) là : $8(x + 4) - 3(y + 5) = 0 \Leftrightarrow 8x - 3y + 17 = 0$

- Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình :

  $$\begin{cases} 8x - 3y = -17 \\ 5x + 3y = 4 \end{cases} \quad \text{Vậy } A(-1, 3).$$



Tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 3x - 5y = 13 \\ 3x + 8y = -13 \end{cases} \quad \text{Vậy } C(1, -2).$$

(AC) qua A và có VTCP $\overrightarrow{AC} = (2, -5)$

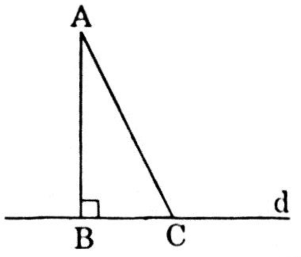
Phương trình chính tắc (AC) : $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{-5}$. ■

Bài 6. *Dự bị A 2004*

Cho $A(0, 2)$ và (d) : $x - 2y + 2 = 0$.

Tìm B, C trên (d) mà ΔABC vuông tại B và $AB = 2BC$.

GIẢI



(AB) qua A (0, 2)

(AB) ⊥ (d) nên có PVT (2, 1)

Phương trình AB : $2(x - 0) + 1(y - 2) = 0$

Tọa độ B là nghiệm hệ $\begin{cases}2x + y = 2\\ x - 2y = -2\end{cases}$. Vậy $B\left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

Đặt $y_C = c$. Do $C \in d \Rightarrow x_C = 2c - 2$

Ta có $AB^2 = 4BC^2 \Leftrightarrow \frac{4}{25} + \left(\frac{6}{5} - 2\right)^2 = 4\left[\left(2c - 2 - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(c - \frac{6}{5}\right)^2\right]$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{25} = 4\left[4\left(c - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(c - \frac{6}{5}\right)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{25} = 20\left(c - \frac{6}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \left(c - \frac{6}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

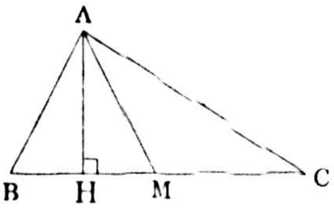
$$\Leftrightarrow c - \frac{6}{5} = \pm\frac{1}{5} \Leftrightarrow c = \frac{7}{5} \vee c = 1$$

Vậy $C_1\left(\frac{4}{7}, \frac{7}{5}\right) \vee C_2(0, 1)$. ■

Bài 7. Lập phương trình các cạnh ΔABC biết đỉnh C(4, −1), đường cao và đường trung tuyến kẻ từ một đỉnh có phương trình :

$$2x - 3y + 12 = 0; \quad 2x + 3y = 0.$$

GIẢI



Hiển nhiên C ∉ đường trung tuyến và đường cao trên.

Gọi (AH) : $2x - 3y + 12 = 0$

(AM) : $2x + 3y = 0$

Tọa độ A là nghiệm hệ phương trình : $\begin{cases}-2x + 3y = 12\\ 2x + 3y = 0\end{cases}$

Vậy A(−3, 2).

(AC) qua A và có VTCP $\overrightarrow{CA} = (7, -3)$. Phương trình (AC) là :

$$\frac{x + 3}{7} = \frac{y - 2}{-3} \Leftrightarrow -7(y + 1) = 3(x - 4) \Leftrightarrow 3x + 7y - 5 = 0$$

Đường thẳng CB qua C và ⊥ AH nên có PVT (3, 2). Phương trình (CB) là

$$3(x - 4) + 2(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - 10 = 0$$

Tọa độ M là nghiệm hệ phương trình :

$$\begin{cases}3x + 2y = 10\\ 2x + 3y = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 6\\ y = -4\end{cases} \quad \text{Vậy } M(6, -4).$$

Vì M trung điểm BC nên $\begin{cases} x_B = 2x_M - x_C = 12 - 4 = 8 \\ y_B = 2y_M - y_C = -8 + 1 = -7 \end{cases}$

Do đó phương trình đường thẳng AB là :

$$\frac{x-8}{11} = \frac{y+7}{-9} \quad \Leftrightarrow \quad 9x + 11y + 5 = 0. \quad \blacksquare$$

Bài 8. Cho ΔABC có $B(2, -7)$, đường cao $(AH) : 3x + y + 7 = 0$, trung tuyến $(CI) : x + 2y + 7 = 0$. Viết phương trình ba cạnh của tam giác.

GIẢI

- (BC) qua B và vuông góc (AH) nên có PVT là $(1, -3)$

  Phương trình (BC) là : $1(x - 2) - 3(y + 7) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3y - 23 = 0$

- Do I là trung điểm AB nên :

$$\begin{cases} x_A + x_B = 2x_I \\ y_A + y_B = 2y_I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{1}{2}(x_A + 2) & (1) \\ y_I = \frac{1}{2}(y_A - 7) & (2) \end{cases}$$

Mà $I \in (CI)$ nên $x_I + 2y_I + 7 = 0$ (3)

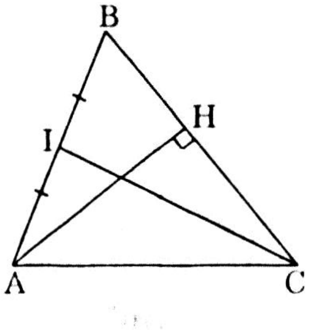
Thay (1), (2) vào (3) ta được : $\frac{1}{2}(x_A + 2) + (y_A - 7) + 7 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x_A + 2y_A + 2 = 0$$

Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 3x + y = -11 \end{cases}$ Vậy $A(-4, 1)$.

(AB) qua A và có VTCP là $\overrightarrow{AB} = (6, -8) = 2(3, -4)$

Phương trình chính tắc AB : $\frac{x+4}{3} = \frac{y-1}{-4}$.



- Tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình :

  $\begin{cases} x - 3y = 23 \\ x + 2y = -7 \end{cases}$ Vậy $C(5, -6)$

(BC) qua C và có VTCP là $\overrightarrow{BC} = (3, 1)$

Phương trình chính tắc BC : $\frac{x-5}{3} = \frac{y+6}{1}$. $\blacksquare$

Bài 9. Cho ΔABC có $A\left(\frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right)$ và hai đường phân giác là :

$$(d_1) : x - 2y - 1 = 0 \quad \text{và} \quad (d_2) : x + 3y + 1 = 0.$$

Viết phương trình cạnh BC.

GIẢI

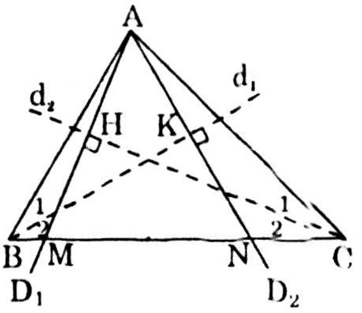
- Qua A vẽ $(D_1) \perp (d_2)$ tại H và cắt (BC) tại M.

  $(D_1) \perp (d_2)$ vậy (D_1) có PVT (3, –1)

  $$(D_1) : 3\left(x - \frac{4}{5}\right) - 1\left(y - \frac{7}{5}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - y - 1 = 0$$

  Tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ Vậy $H\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$

  ΔACM cân nên H là trung điểm AM.



  $$\text{Vậy} \begin{cases} x_M = 2x_H - x_A = \dfrac{4}{5} - \dfrac{4}{5} = 0 \\ y_M = 2y_H - y_A = \dfrac{2}{5} - \dfrac{7}{5} = -1 \end{cases}$$

  Vậy M(0, –1).

- Tương tự qua A kẻ đường thẳng vuông góc (d_1) tại K, đường này cắt BC tại N thì $K\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$ nên N(2, –1).

- (BC) qua M(0, –1) và có VTCP là $\overrightarrow{MN} = (2, 0)$.

  Vậy phương trình BC là : $\dfrac{x - 0}{2} = \dfrac{y + 1}{0} \quad \Leftrightarrow \quad y + 1 = 0.$ ■

Ghi chú : Khi gặp bài toán đã cho một đỉnh và phương trình phân giác của tam giác, ta tìm điểm đối xứng đỉnh qua phân giác rất hiệu quả.

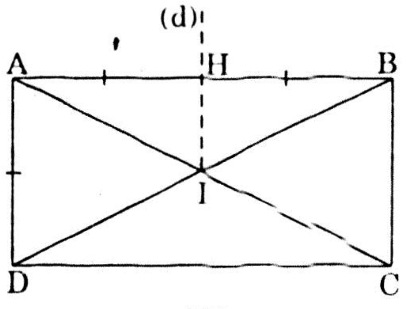
Bài 10. *Tuyển sinh Đại học khối B 2002.*

Cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, AB = 2AD và phương trình (AB) là $x - 2y + 2 = 0$. Biết rằng $x_A < 0$. Tìm tọa độ A, B, C, D.

GIẢI

- Vẽ (d) qua I và vuông góc (AB) tại H thì (d) có PVT là (2, 1).

  Phương trình (d) : $2\left(x - \frac{1}{2}\right) + y = 0$



  Tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình :

  $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$ Vậy H(0, 1)

- Ta có $HA = HB = AD = \dfrac{AB}{2}$ mà $IH = \dfrac{1}{2}AD$ nên $HI = \dfrac{AH}{2}$

Gọi $y_A = a$ thì $x_A = 2a - 2$ (do $A \in (AB)$)

Vậy $AH^2 = 4HI^2 \Leftrightarrow (2a-2)^2 + (a-1)^2 = 4\left(\frac{5}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 5(a-1)^2 = 5 \Leftrightarrow a - 1 = 1 \vee a - 1 = -1$

$\Leftrightarrow a = 2 \vee a = 0$

Khi a = 2 thì $x_A = 2$ (loại do $x_A < 0$)

Vậy A(−2, 0)

- H là trung điểm AB nên $\begin{cases} x_B = 2x_H - x_A = 2 \\ y_B = 2y_H - y_A = 2 \end{cases}$
- I là trung điểm AC nên $\begin{cases} x_C = 2x_I - x_A = 3 \\ y_C = 2y_I - y_A = 0 \end{cases}$
- I là trung điểm BD nên $\begin{cases} x_D = 2x_I - x_A = -1 \\ y_D = 2y_I - y_A = -2 \end{cases}$

Do đó A(−2, 0); B(2, 2); C(3, 0); D(−1, −2). ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. *Dự bị khối B 2006*

Cho ΔABC cân tại B có A(1, −1); B(3, 5); $C \in d : 2x - y = 0$.

Viết phương trình AB và AC.

BT2. *Dự bị khối D 2003*

ΔABC có A(1, 0); đường cao $BH : x - 2y + 1 = 0$; $CK : 3x + y - 1 = 0$.

Tính diện tích ΔABC.

BT3. Cho tam giác có trung điểm một cạnh là M(−1, 1) còn hai cạnh kia có phương trình : $x + y - 2 = 0$; $2x + 6y + 3 = 0$.

Xác định các đỉnh của tam giác.

BT4. Cho $d_1 : 2x - y - 2 = 0$; $d_2 : x + y + 3 = 0$, M(3, 0). Viết phương trình đường thẳng qua M và cắt d_1, d_2 tại A và B sao cho MA = MB.

BT5. Viết phương trình đường thẳng qua A(2, −2) và tạo với 2 trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1.

BT6. Cho tam giác ABC với B(3, 5); C(4, −3), đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ có phương trình : $x + 2y - 8 = 0$. Viết phương trình 3 cạnh của ΔABC.

BT7. **a)** Viết phương trình đường thẳng qua M(1, 2) và chắn trên 2 trục tọa độ các đoạn bằng nhau.

b) Cho ΔABC có đỉnh A(2, −1), phương trình hai đường cao qua B và C là :

$$2x - y + 1 = 0; \qquad 3x + y + 2 = 0.$$

Viết phương trình đường trung tuyến qua A.

BT8. Cho A(1, 1), đường cao BH : $-2x + y - 8 = 0$, đường cao CH : $2x + 3y - 6 = 0$.

Viết phương trình đường cao AH. Tìm B và C.

BT9. Cho ΔABC có B(3, 5); C(4, −3), đường phân giác $\hat{A}$ có phương trình là $x + 2y - 8 = 0$. Viết phương trình cạnh AB và AC.

BT10. Biết phương trình hai cạnh tam giác là :

$$5x - 2y + 6 = 0 \quad \text{và} \quad 4x + 7y - 21 = 0.$$

Viết phương trình cạnh thứ ba biết trực tâm tam giác trùng với gốc tọa độ.

BT11. Cho ΔABC có M(−2, 2) là trung điểm cạnh BC, cạnh AB có phương trình : $x - 2y - 2 = 0$, cạnh AC có phương trình $2x + 5y + 3 = 0$.

Xác định tọa độ các đỉnh Δ.

BT12. Cho ΔABC. Cạnh BC có trung điểm M(0, 4) còn 2 cạnh kia có phương trình : $2x + y - 11 = 0$; $x + 4y - 2 = 0$.

a) Xác định tọa độ đỉnh A.

b) Gọi C là đỉnh nằm trên đường thẳng (d) : $x + 4y - 2 = 0$.

N là trung điểm AC. Tính N, C, B.

BT13. Cho điểm $M\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ và hai đường thẳng có phương trình $y = \frac{x}{2}$ và $y - 2x = 0$. Lập phương trình đường thẳng (d) qua M và cắt 2 đường thẳng trên tại 2 điểm A, B sao cho M là trung điểm AB.

BT14. *Dự bị khối B 2006*

Cho ΔABC có A(2, 1), đường cao BH : $x - 3y - 7 = 0$,

trung tuyến CM : $x + y + 1 = 0$. Tìm B, C.

BT15. *Dự bị khối A 2005*

Cho ΔABC cân tại A trọng tâm $G\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$, BC : $x - 2y - 4 = 0$,

BG : $7x - 4y - 8 = 0$. Tìm A, B, C ?

BT16. *Dự bị khối A 2006*

ΔABC có A ∈ d : $x - 4y - 2 = 0$, BC // d, đường cao BH : $x + y + 3 = 0$.

M(1, 1) là trung điểm AC. Tìm A, B, C.

Vấn đề 2 : VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Xét $(d_1) : A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$(d_2) : A_2x + B_2y + C_2 = 0$

$$\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 & A_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & A_2 \\ \lfloor\_\_ & \_\_\rfloor\lfloor\_\_ & \_\_\rfloor\lfloor\_\_ & \_\_\rfloor \\ & D & D_x & D_y \end{matrix}$$

Tính $D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$; $D_x = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$; $D_y = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$

- *Nếu* $D \neq 0$ *thì* (d_1) *cắt* (d_2) *tại* $I \begin{cases} x_I = \dfrac{D_x}{D} \\ y_I = \dfrac{D_y}{D} \end{cases}$
- *Nếu* $D = 0 \wedge (D_x \neq 0 \vee D_y \neq 0)$ *thì* $(d_1) \,//\, (d_2)$
- *Nếu* $D = D_x = D_y = 0$ *thì* $(d_1) \equiv (d_2)$

BÀI TẬP

Bài 11. Cho $(D_1) : kx - y + k = 0$ và $(D_2) : (1 - k^2)x + 2ky - 1 - k^2 = 0$

a) Chứng minh (D_1) luôn qua một điểm cố định.

b) Tìm giao điểm I của (D_1), (D_2).

c) Tìm quỹ tích I.

GIẢI

a) $M(x_o, y_o) \in (D_1)\ \forall k \Leftrightarrow k(x_o + 1) - y_o = 0\ \forall k \Leftrightarrow \begin{cases} x_o + 1 = 0 \\ y_o = 0 \end{cases}$

Vậy (D_1) luôn qua điểm cố định $(-1, 0)$.

b) Ta có : $D = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 - k^2 & 2k \end{vmatrix} = 1 + k^2 \neq 0\ \ \forall k$

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & k \\ 2k & -1 - k^2 \end{vmatrix} = 1 - k^2, \qquad D_y = \begin{vmatrix} k & k \\ -1 - k^2 & 1 - k^2 \end{vmatrix} = 2k$$

Do đó (D_1) luôn cắt (D_2) tại $I \begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{1 - k^2}{1 + k^2} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{2k}{1 + k^2} \end{cases}$

Vậy $I\left(\dfrac{1 - k^2}{1 + k^2}, \dfrac{2k}{1 + k^2}\right)$.

c) Ta có : $x_I^2 + y_I^2 = \dfrac{(1-k^2)^2 + 4k^2}{(1+k^2)^2} = \dfrac{k^4 + 2k^2 + 1}{(k^2+1)^2} = 1$

Giới hạn : $x_I = \dfrac{1-k^2}{1+k^2} \Leftrightarrow (1 + x_I)k^2 = 1 - x_I$

Vậy điều kiện là $\begin{cases} 1 + x_I \neq 0 \\ k^2 = \dfrac{1 - x_I}{1 + x_I} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I \neq -1 \\ x_I \in [-1, 1] \end{cases}$

Do đó quỹ tích I là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ loại bỏ điểm $(-1, 0)$ ■

Bài 12. Cho $(d_1) : (a + 1)x - 2y - a - 1 = 0$

$(d_2) : x + (a - 1)y - a^2 = 0$

a) Tìm giao điểm I của d_1, d_2.

b) Tìm a để đường thẳng qua M(0, a); N(a, 0) đi qua giao điểm I.

GIẢI

a)

$$\begin{array}{ccccccc} a+1 & & -2 & & -a-1 & & a+1 \\ 1 & & a-1 & & -a^2 & & 1 \\ & D & & D_x & & D_y & \end{array}$$

Ta có : $D = (a + 1)(a - 1) + 2 = a^2 + 1$

$D_x = 2a^2 + (a + 1)(a - 1) = 3a^2 - 1$

$D_y = -(a + 1) + a^2(a + 1) = (a + 1)(a^2 - 1) = (a + 1)^2(a - 1$

Vậy d_1 luôn cắt d_2 tại I $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{3a^2 - 1}{a^2 + 1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{(a+1)^2(a-1)}{a^2+1} \end{cases}$

b) Phương trình đường thẳng MN : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow x + y - a = 0 \quad (a \neq 0)$

Do I ∈ MN $\Leftrightarrow 3a^2 - 1 + (a + 1)^2(a - 1) - a(a^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2a^2 - a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = -\dfrac{1}{2}$. ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT17. Biện luận theo m vị trí tương đối của 2 đường thẳng

$d_1 : (m + 1)x + 5y + m = 0$

$d_2 : 2x + (2m + 3)y + 1 = 0.$

BT18. Cho 2 đường thẳng $d_1 : (a - b)x + y + 1 = 0$

$d_2 : (a^2 - b^2)x + ay + b = 0$ (với $a^2 + b^2 > 0$)

a) Tìm giao điểm I của d_1, d_2.

b) Tìm điều kiện về a, b để I nằm trên trục hoành.

BT19. Cho 2 đường thẳng $d_1 : (a - b)x + y = 1$

$d_2 : (a^2 - b^2)x + ay = b$ với $b^2 = 4a^2 + 1$.

a) Tìm giao điểm I của d_1 và d_2.

b) Tìm quỹ tích I khi a, b thay đổi.

BT20. Cho $(d_1) : \begin{cases} x = x_1 + mt \\ y = y_1 + nt \end{cases}$; $(d_2) : \begin{cases} x = x_2 + pt' \\ y = y_2 + qt' \end{cases}$

Tìm điều kiện cần và đủ để :

a) d_1 cắt d_2 **b)** $d_1 // d_2$

c) d_1 trùng d_2 **d)** d_1 vuông góc d_2.

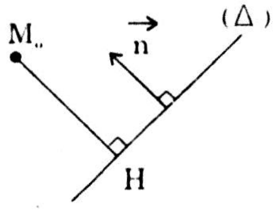
BT21. Cho $(d_1) : mx + y - 3 = 0$; $(d_2) : x + my - 2m - 1 = 0$

Tìm các giá trị nguyên của m để d_1 cắt d_2 tại 1 điểm có tọa độ nguyên.

Vấn đề 3 : GÓC CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG – ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

- *Cho* $(\Delta) : Ax + By + C = 0$ *và* $M_o(x_o, y_o)$

thì $$\delta(M_o, \Delta) = \frac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Chú ý : $$t = \overline{HM_o} = \frac{Ax_o + By_o + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Khi $t = \overline{HM} > 0 \Rightarrow$ *M và* $\vec{n}$ *cùng phía đối với nửa mặt phẳng bờ* (Δ).

$t = \overline{HM} < 0 \Rightarrow$ *M và* $\vec{n}$ *khác phía đối với nửa mặt phẳng bờ* (Δ).

- *Cho* $(D_1) : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *và* $(D_2) : A_2x + B_2y + C_2 = 0$

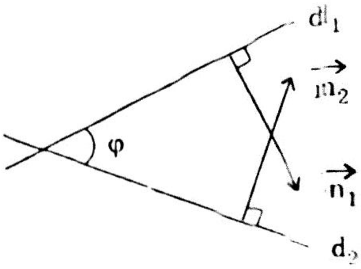
* *Phương trình 2 đường phân giác của góc tạo bởi* (D_1), (D_2) :

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

	Phân giác góc nhọn	*Phân giác góc tù*
$\vec{n}_1 . \vec{n}_2 > 0$	–	+
$\vec{n}_1 . \vec{n}_2 < 0$	+	–

- *Gọi φ là góc của 2 đường thẳng d_1, d_2 $(0 \le \varphi \le 90^\circ)$*

thì $$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}_1 . \vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right| . \left|\vec{n}_2\right|}$$



$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

BÀI TẬP

Bài 13. Viết phương trình đường thẳng song song với (d) : 3x – 4y + 1 = 0 và có khoảng cách đến đường thẳng (d) bằng 1.

GIẢI

Phương trình đường thẳng (Δ) // (d) có dạng : 3x – 4y + C = 0

Lấy $M\left(0, \frac{1}{4}\right) \in (d)$

Vì d // Δ nên $\delta(d, \Delta) = \delta(M, \Delta) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\left|3(0) - 4\left(\frac{1}{4}\right) + C\right|}{\sqrt{9 + 16}} = 1$

$\Leftrightarrow |C - 1| = 5 \Leftrightarrow C - 1 = \pm 5 \Leftrightarrow C = 4 \vee C = -6$

Vậy có hai đường thẳng Δ_1 : 3x – 4y + 4 = 0

Δ_2 : 3x – 4y – 6 = 0. ■

Bài 14. Tìm phương trình đường thẳng qua M(–2, 3) cách đều hai điểm A(–1, 0); B(2, 1).

GIẢI

Gọi (d) là đường thẳng qua M và có pháp vectơ (m, n)

Phương trình (d) : m(x + 2) + n(y – 3) = 0

Ta có : $\delta(A, d) = \delta(B, d) \Leftrightarrow \dfrac{|m - 3n|}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \dfrac{|4m - 2n|}{\sqrt{m^2 + n^2}}$

$\Leftrightarrow m - 3n = \pm(4m - 2n) \Leftrightarrow n = -3m \vee m = n$

* Khi $n = -3m$, chọn $m = 1 \wedge n = -3$ thì phương trình (d) là :

$$1(x + 2) - 3(y - 3) = 0$$

* Khi $n = m$, chọn $m = n = 1$ thì phương trình (d) là :

$$(x + 2) + (y - 3) = 0$$

Vậy có 2 đường thẳng cần tìm : $x - 3y + 11 = 0$ và $x + y - 1 = 0$. ■

Bài 15. *Tuyển sinh Đại học khối B 2004*

Cho $A(1, 1)$ và $B(4, -3)$. Tìm điểm C thuộc (d) : $x - 2y - 1 = 0$ sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.

GIẢI

(AB) qua A và có VTCP $\overrightarrow{AB} = (3, -4)$ vậy có phương trình :

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-4} \Leftrightarrow 4x + 3y - 7 = 0$$

Đặt $y_C = c$ thì $x_C = 2c + 1$ (do $C \in (d)$)

Ta có $\delta(C, (AB)) = 6 \Leftrightarrow \dfrac{|4(2c+1) + 3c - 7|}{\sqrt{9+16}} = 6 \Leftrightarrow |11c - 3| = 30$

$$\Leftrightarrow 11c - 3 = \pm 30 \Leftrightarrow c = 11 \vee c = \frac{-27}{11}$$

Do đó $C(23, 11)$ hoặc $C\left(-\dfrac{43}{11}, -\dfrac{27}{11}\right)$. ■

Bài 16. *Tuyển sinh ĐH khối A 2006*

Tìm $M \in \Delta : x - 2y = 0$ sao cho khoảng cách từ M đến $d_1 : x + y + 3 = 0$ bằng 2 khoảng cách từ M đến $d_2 : x - y - 4 = 0$.

GIẢI

Gọi $M(2m, m) \in \Delta : x - 2y = 0$.

Ta có $\delta(M, d_1) = 2\delta(M, d_2) \Leftrightarrow \dfrac{|2m + m + 3|}{\sqrt{2}} = 2\dfrac{|2m - m - 4|}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow |3m + 3| = 2|m - 4| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3m + 3 = (m-4)^2 \\ 3m + 3 = (4-m)^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow m = -11 \vee m = 1$$

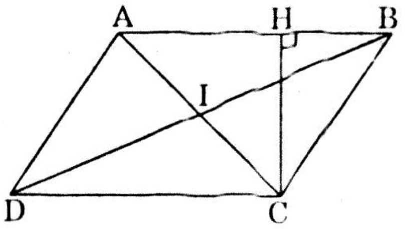
Vậy $M_1(-22, -11) \vee M_2(2, 1)$. ■

Bài 17. Cho hình bình hành ABCD có diện tích bằng 4. Tâm hình bình hành nằm trên (d) : $y = x$. Biết $A(1, 0)$; $B(2, 0)$. Tìm toạ độ điểm C và D.

GIẢI

Gọi $I(a, a)$ là tâm hình bình hành (do $I \in (d) : y = x$)

I là trung điểm AC nên : $\begin{cases} x_C = 2x_I - x_A = 2a - 1 \\ y_C = 2y_I - y_A = 2a \end{cases}$



A, B $\in$ x'Ox nên phương trình (AB) là : $y = 0$

Ta có $dt(ABCD) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad AB.CH = 4$

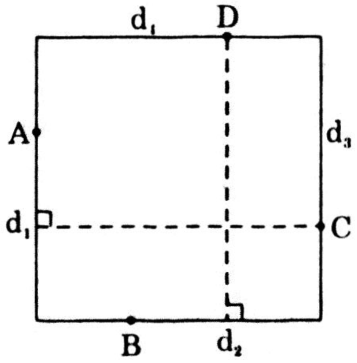
$\Leftrightarrow \quad \delta(C, (AB)) = \dfrac{4}{AB} = 4$

$\Leftrightarrow \quad |2a| = 4 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 2$

Khi $a = 2$ thì $C(3, 4)$ và $D(2, 4)$

Khi $a = -2$ thì $C(-5, -4)$ và $D(-6, -4)$. ■

Bài 18*. Cho $A(2, 1)$; $B(0, 1)$; $C(3, 5)$; $D(-3, -1)$. Viết phương trình các cạnh hình vuông mà hai cạnh song song lần lượt qua A và C, hai cạnh song song còn lại lần lượt qua B và D.



GIẢI

Gọi $\vec{n} = (a, b)$ là PVT của (d_1) qua A.

Phương trình (d_1) : $a(x - 2) + b(y - 1) = 0$

Do (d_2) qua B và vuông góc (d_1) nên (d_2) có PVT là $\vec{m} = (b, -a)$

Phương trình (d_2) : $b(x - 0) - a(y - 1) = 0$

Do hai cạnh kề của hình vuông bằng nhau nên :

$$\delta(C, (d_1)) = \delta(D, (d_2)) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|a + 4b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-3b + 2a|}{\sqrt{b^2 + a^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a + 4b = -3b + 2a \\ a + 4b = 3b - 2a \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad a = 7b \vee b = -3a$$

- Khi $a = 7b$, chọn $b = 1 \wedge a = 7$

Vậy (d_1) : $7(x - 2) + 1(y - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 7x + y - 15 = 0$

$(d_3) // (d_1)$ nên phương trình (d_3) là :

$$7(x - 3) + 1(y - 5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 7x + y - 26 = 0$$

(d_2) : $1x - 7(y - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 7y + 7 = 0$

(d_4) // (d_2) nên phương trình (d_4) là : $1(x + 3) - 7(y + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x - 7y - 4 = 0.$

- Khi $b = -3a$, chọn $a = 1 \wedge b = -3$

$(d_1) : 1(x - 2) - 3(y - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3y + 1 = 0$

$(d_3) : 1(x - 3) - 3(y - 5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3y + 12 = 0$

$(d_2) : -3(x - 0) - 1(y - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + y - 1 = 0$

$(d_4) : -3(x + 3) - 1(y + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + y + 10 = 0.$ ■

Bài 19. Cho $(d_1) : 2x - y - 2 = 0;$ $(d_2) : 2x + 4y - 7 = 0.$

a) Viết phương trình 2 đường phân giác của các góc tạo bởi (d_1), (d_2).

b) Viết phương trình đường thẳng qua $P(3, 1)$ và cùng (d_1), (d_2) tạo thành một tam giác cân tại đỉnh là giao điểm của (d_1), (d_2).

GIẢI

a) Phương trình 2 đường phân giác của các góc tạo bởi (d_1), (d_2) là :

$$\frac{2x - y - 2}{\sqrt{5}} = \pm \frac{2x + 4y - 7}{2\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(2x - y - 2) = \pm(2x + 4y - 7) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 2x - 6y + 3 = 0 \\ 6x + 2y - 11 = 0 \end{array}\right.$$

b) Ta có $d_1 \perp d_2$ vì $\vec{n_1} . \vec{n_2} = 4 - 4 = 0$

Gọi (Δ) là đường thẳng qua P và có pháp vectơ (A, B).

Phương trình của $(\Delta) : A(x - 3) + B(y - 1) = 0$

Do tam giác tạo bởi Δ, d_1, d_2 là tam giác vuông cân nên gọi φ là góc của d_1 và Δ thì $\varphi = 45^\circ$.

$$\Rightarrow \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|2A - B|}{\sqrt{5}.\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 10(A^2 + B^2 = 4(4A^2 - 4AB + B^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3A^2 - 8AB - 3B^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{4B \pm 5B}{3} = \left\langle \begin{array}{l} 3B \\ -\dfrac{B}{3}. \end{array}\right.$$

Khi $A = 3B$ chọn $B = 1 \wedge A = 3 \Rightarrow$ Pt $(\Delta) : 3(x - 3) + 1(y - 1) = 0$

Khi $A = -\dfrac{B}{3}$ chọn $B = -3 \wedge A = 1 \Rightarrow$ Pt $(\Delta) : 1(x - 3) - 3(y - 1) = 0$

Vậy phương trình 2 đường thẳng cần tìm :

$3x + y - 10 = 0 \vee x - 3y = 0.$ ■

Bài 20. Viết phương trình đường thẳng qua A(2, 1) và tạo với

$$(d): 2x + 3y + 4 = 0 \text{ một góc } \frac{\pi}{4}.$$

GIẢI

Gọi (D) là đường thẳng qua A và PVT (n, m).

Do góc của (d) và (D) bằng $\frac{\pi}{4}$ nên : $\cos\frac{\pi}{4} = \dfrac{|2n + 3m|}{\sqrt{4 + 9}.\sqrt{m^2 + n^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}|2n + 3m| = \sqrt{13}.\sqrt{m^2 + n^2}$

$\Leftrightarrow \quad 2(4n^2 + 12nm + 9m^2) = 13(m^2 + n^2) \quad \Leftrightarrow \quad 5n^2 - 24mn - 5m^2 = 0$

$\Delta'_n = (-12m)^2 - 5(-5m^2) = (13m)^2$

Vậy $n = \dfrac{12m \pm 13m}{5} = \left\langle \begin{array}{l} 5m \\ -\dfrac{m}{5} \end{array} \right.$

- Với n = 5m : Chọn m = 1 ∧ n = 5.

  Phương trình (D) : $5(x - 2) + 1(y - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5x + y - 11 = 0$

- Với $n = -\dfrac{m}{5}$: Chọn m = –5 ∧ n = 1.

  Phương trình (D) : $1(x - 2) - 5(y - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 5y + 3 = 0.$ ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT22. *Dự bị khối D 2003*

Cho ΔABC có A(1, 0), đường cao BH : $x - 2y + 1 = 0$,

đường cao (CK) : $3x + y - 1 = 0$.

Tính diện tích ΔABC.

BT23. Viết phương trình đường thẳng qua I(–2, 3) và cách đều 2 điểm A(5, –1); B(3, 7).

BT24. Cho ΔABC có diện tích bằng $\frac{2}{3}$, A(2, –3); B(3, –2), trọng tâm G nằm trên (d) : $3x - y - 8 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C.

BT25. Cho A(3, 1) và (d) : $(m + 1)x + (2m - 1)y + 4m - 2 = 0$.

a) Chứng minh (d) luôn qua điểm cố định B.

b) Tìm m để khoảng cách từ A đến (d) là lớn nhất.

BT26. Cho (D) : $x - 3y + 1 = 0$ và điểm A(0, 3). Vẽ AH ⊥ (D) với H ∈ (D) và kéo dài AH về phía H một đoạn HB = 2AH. Tìm tọa độ điểm B.

BT27. Cho ΔABC có phương trình các cạnh là :

$$AB : 4x + 3y - 1 = 0; \quad AC : 3x + 4y - 6 = 0; \quad BC : y = 0.$$

a) Tính diện tích ΔABC.

b) Viết phương trình đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$.

c) Tìm tọa độ tâm và tính bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.

BT28. Cho 2 đường thẳng $(d_1) : 2x - y + 1 = 0$ và $(d_2) : x + 2y - 7 = 0$. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua gốc tọa độ O sao cho đường thẳng (d) tạo với (d_1), (d_2) một tam giác cân tại đỉnh là giao điểm của d_1 và d_2. Tính diện tích tam giác đó.

BT29. Viết phương trình 3 cạnh của ΔABC trong mặt phẳng Oxy, biết đỉnh C(4, 3), đường phân giác trong và đường trung tuyến kẻ từ một đỉnh của tam giác có phương trình lần lượt là : $x + 2y - 5 = 0$ và $4x + 13y - 10 = 0$.

BT30. Cho hình vuông ABCD có A(–4, 5). Đường chéo BD có phương trình $7x - y + 8 = 0$. Tìm tọa độ B, C, D.

BT31. Cho ΔABC cân, cạnh đáy BC có phương trình : $x + 3y + 1 = 0$. Cạnh bên AB có phương trình : $x - y + 5 = 0$. Đường thẳng chứa cạnh AC đi qua M(–4, 1). Tìm tọa độ đỉnh C.

BT32. Cho ΔABC có diện tích bằng $\frac{3}{2}$, A(2, –3); B(–3, 2). Trọng tâm G nằm trên (d) : $3x - y - 8 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C.

BT33. Cho hình vuông ABCD có cạnh AB nằm trên đường thẳng : $x - y + 8 = 0$ và hai đỉnh C, D nằm trên (P) : $y = x^2$. Tính diện tích hình vuông.

30 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

A. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1 Phương trình đường thẳng qua A(0, 1); B(–1, 0) là :

a) $-\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$

b) $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t, \ t \in R \end{cases}$

c) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1}$

d) Các kết quả a, b, c đều đúng.

2 Phương trình đường thẳng qua M(–1, 2); N(2, 4) là :

a) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2}$

b) $2x - 3y + 8 = 0$

c) $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$

d) Các kết quả a, b, c đều đúng.

$\boxed{3}$ ΔABC cân tại B. Biết $B \in (d) : 2x - y = 0$; $A(1, -1)$; $C(3, 5)$ thì tọa độ B là :

a) $B\left(\frac{8}{7}, \frac{16}{7}\right)$ b) $B\left(\frac{16}{7}, \frac{8}{7}\right)$ c) $B\left(\frac{4}{7}, \frac{8}{7}\right)$ d) $B(8, 16)$.

$\boxed{4}$ **Hệ số góc của đường thẳng qua A(2, 3) và B(3, 1) là k bằng :**

a) 2 b) −2 c) 1 d) Không xác định.

$\boxed{5}$ **Đường thẳng qua M(1, 2); N(1, −3) có pháp vectơ là :**

a) $\vec{n} = (0, 1)$ b) $\vec{n} = (1, 0)$

c) $\vec{n} = (0, -5)$ d) $\vec{n} = (1, 2)$.

$\boxed{6}$ **Phương trình tổng quát của đường thẳng qua M(1, 2) và chắn trên 2 trục tọa độ các đoạn bằng nhau là :**

a) $x - y - 3 = 0$ b) $x - y + 3 = 0$

c) $x + y + 3 = 0$ d) $x + y - 3 = 0$.

- ***Cho ΔABC có A(1, 4); B(3, −1); C(6, 2).***

Hãy trả lời các câu hỏi 7, 8, 9, 10.

$\boxed{7}$ Phương trình tổng quát đường thẳng BC là :

a) $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{1}$ b) $x - y + 4 = 0$

c) $x - y - 4 = 0$ d) $x + y - 4 = 0$.

$\boxed{8}$ Phương trình tổng quát đường cao AH là :

a) $x + y + 5 = 0$ b) $x + y - 5 = 0$

c) $x - y + 5 = 0$ d) $x - y - 5 = 0$.

$\boxed{9}$ Phương trình tham số đường trung tuyến AM là :

a) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 - t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = \frac{9}{2} - 3t \\ y = \frac{1}{2} + 3t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$ d) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-4}{1}$.

$\boxed{10}$ **Phương trình tổng quát đường trung trực của AB là :**

a) $5x + 2y - 1 = 0$ b) $2x - 5y + 7 = 0$

c) $2x - 5y + \frac{7}{2} = 0$ d) $2x + 5y + \frac{7}{2} = 0$.

11 Hình chiếu vuông góc của $M(2, 7)$ lên $(d) : x - 2y + 2 = 0$ là :

a) $H(-4, -3)$ b) $H(4, 3)$ c) $H(-4, 3)$ d) $H(4, -3)$.

12 Phương trình đường thẳng qua $A(-1, -3)$ và vuông góc với $(d) : 3x + 8y - 12 = 0$ là :

a) $8x - 3y - 1 = 0$ b) $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+3}{8}$

c) $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -3 + 8t \end{cases}$ d) Các kết quả a, b, c đều đúng.

13 Phương trình đường thẳng qua $M(-1, -2)$ và song song $(\Delta) : \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{-2}$ là :

a) $2x + 5y - 12 = 0$ b) $2x + 5y + 12 = 0$

c) $2x - 5y + 12 = 0$ d) $2x - 5y - 12 = 0$.

14 Điểm đối xứng của $O(0, 0)$ qua $(D) : x - y + 2 = 0$ là :

a) $(2, 2)$ b) $(2, -2)$ c) $(-2, 2)$ d) $(-2, -2)$.

15 Cho $A(2; 1)$ và $\Delta \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \end{cases}$. Lấy $M \in \Delta$. Để AM ngắn nhất thì :

a) $M(1, 2)$ b) $M(-1, 2)$ c) $M(1, -2)$ d) $M(-1, -2)$.

B. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI 2 ĐƯỜNG THẲNG

16 Cho $d : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$ và $d' : 2x + 4y - 10 = 0$.

Kết luận nào sau đây là đúng :

a) d song song d'. b) d trùng với d'.

c) d cắt d'. d) Góc của d và d' là 30^0.

17 Cho $d_1 : 2x - y + 3 = 0$; $d_2 : x + y + 3 = 0$; $d_3 : ax + y - 3 = 0$

Để d_1, d_2, d_3 đồng quy thì :

a) $a = -2$ b) $a = 2$ c) $a = 1$

d) Các kết quả a, b, c đều sai.

18 Cho $(d) \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \end{cases}$ và $(d') \begin{cases} x = t' \\ y = 3 + t' \end{cases}$. Kết luận nào sau đây là đúng :

a) d cắt d'. b) d // d'.

c) d trùng d'. d) d và d' chéo nhau.

19 ΔABC có phương trình $(AB) : 2x + y - 11 = 0$; $(AC) : x + 4y - 2 = 0$; $M(0, 4)$ là trung điểm BC thì tọa độ C là :

a) $(-2, 1)$ b) $(2, 7)$ c) $(2, 1)$ d) $(2, -7)$.

20 Cho $d_1 : x - 2y = 0$ và $d_2 : y = 2x$. Phương trình đường thẳng qua $M\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ cắt d_1 và d_2 lần lượt tại A và B mà M là trung điểm AB là :

a) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{7}$

b) $7x - 2y + 6 = 0$

c) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{7}$

d) $7x + 2y - 6 = 0$.

21 Cho ΔABC biết A(1, 3), hai đường trung tuyến là $(d_1) : y = 1$ và $(d_2) : x - 2y + 1 = 0$ thì tọa độ B và C là :

a) (5, 1) và (3, 1)

b) (5, 1) và (–3, 1)

c) (–5, 1) và (–3, 1)

d) (5, 1) và (–3, –1).

22 Cho A(1, –2); B(3, 4). Tìm $M \in x'Ox$ sao cho MA + MB ngắn nhất thì :

a) $M\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$

b) $M\left(\frac{5}{3}, 0\right)$

c) $M\left(0, \frac{5}{3}\right)$

d) M không tồn tại

C. KHOẢNG CÁCH – GÓC

23 Cho A(1, 2) và (d) : $\frac{x-1}{2} = y + 1$ thì khoảng cách từ A đến d là :

a) –6

b) $\frac{-6}{\sqrt{5}}$

c) $\frac{6}{\sqrt{5}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

24 Phương trình đường thẳng song song với (d) : $3x - 4y = 0$ và cách (d) một khoảng bằng 1 là :

a) $3x - 4y + 5 = 0$

b) $3x - 4y - 5 = 0$

c) Hai kết quả a, b đều đúng.

d) Hai kết quả a, b đều sai

25 Tập hợp các điểm cách đều 2 đường thẳng (d) : $5x + 3y - 3 = 0$ và (d') : $5x + 3y + 7 = 0$ là đường thẳng :

a) $5x + 3y + 2 = 0$

b) $5x + 3y - 2 = 0$

c) Hai kết quả a, b đều đúng.

d) Hai kết quả a, b đều sai

26 Phương trình đường phân giác của góc tạo thành bởi (d) : $x - 2y - 3 = 0$ và (d') : $2x + 4y + 7 = 0$ là :

a) $4x + 1 = 0$

b) $8y + 13 = 0$

c) Hai kết quả a, b đều đúng.

d) Hai kết quả a, b đều sai

27 Cho $(d_1) : x - 2y + 1 = 0$; $(d_2) : 2x + y - 1 = 0$. Phương trình phân giác của (d_1), (d_2) qua $O(0, 0)$ là :

a) $3x + y = 0$ b) $3x - y = 0$

c) $2x + y = 0$ d) $2x - y = 0$.

28 Cho ΔABC, I trung điểm BC, có diện tích bằng 4. Tâm $I \in (d) : y = x$; $A(1, 0)$; $B(2, 0)$ thì tọa độ I :

a) $I(2, 4)$ b) $I(-2, -2)$

c) Hai kết quả a, b đều đúng. d) Hai kết quả a, b đều sai.

29 Cho (d) : $\sqrt{3}x - 3y + 1 = 0$ thì góc tạo bởi (d) và trục hoành là :

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $-\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $-\frac{\pi}{6}$.

30 Cho (d) : $x - 2y + 5 = 0$ và (d') : $3x - y + 1 = 0$ thì góc tạo bởi d và d' là :

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $-\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{3\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{2}$.

TRẢ LỜI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Các kết quả a, b, c đều đúng. Chọn d.

2 Các kết quả a, b, c đều đúng. Chọn d.

3 Gọi $B(b, 2b) \in (d) : y = 2x$.

$A(1, -1)$; $C(3, 5)$

Do $BA^2 = BC^2 \Rightarrow (b - 1)^2 + (2b + 1)^2 = (b - 3)^2 + (2b - 5)^2$

$$\Rightarrow 5b^2 + 2b + 2 = 5b^2 - 26b + 34 \Rightarrow b = \frac{8}{7}$$

Vậy $B\left(\frac{8}{7}, \frac{16}{7}\right)$. Chọn a.

4 (d) có VTCP là $\overrightarrow{AB} = (1, -2)$. Vậy $k = \frac{a_2}{a_1} = -2$. Chọn b.

5 $M(1, 2)$; $N(1, -3) \Rightarrow$ VTCP $\overrightarrow{MN} = (0, -5) = -5(0, 1)$

$\Rightarrow$ PVT $\vec{n} = (1, 0)$. Chọn b.

6 d có dạng : $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$.

$M(1, 2) \in d \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{a} = 1 \Rightarrow a = 3$

Phương trình d : $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad x + y - 3 = 0$. Chọn d.

$\boxed{7}$ Phương trình chính tắc (BC) : $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{1} \quad \Leftrightarrow \quad x - y - 4 = 0$

Chọn c.

$\boxed{8}$ AH có PVT là $\overrightarrow{BC} = 3(1, 1)$.

Phương trình AH : $1(x - 1) + 1(y - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y - 5 = 0$

Chọn b.

$\boxed{9}$ Ta có trung điểm BC là $M\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$. $\Rightarrow \quad \overrightarrow{AM} = \frac{7}{2}(1, -1)$.

Phương trình tham số AM : $\begin{cases} x = \frac{9}{2} + t \\ y = \frac{1}{2} - t \end{cases}$ Chọn b.

$\boxed{10}$ Trung điểm của AB là $I\left(2, \frac{3}{2}\right)$

Trung trực của AB qua I, PVT : $\overrightarrow{AB} = (2, -5)$

$$2(x-2) - 5\left(y - \frac{3}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 5y + \frac{7}{2} = 0.$$ Chọn c.

$\boxed{11}$ Phương trình d' qua M(2, 7) và ⊥ (d) : $2(x - 2) + 1(y - 7) = 0$

Tọa độ H : $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad H(4, 3)$. Chọn b.

$\boxed{12}$ (d) có PVT (3, 8).

Vậy d' ⊥ d có PVT (8, –3).

Phương trình d' : $8(x + 1) - 3(y + 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8x - 3y - 1 = 0$

Mặt khác (3, 8) cũng là VTCP của d'.

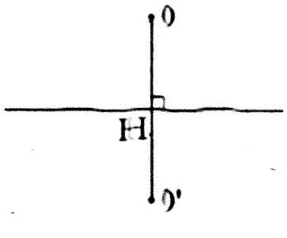
Vậy kết quả b, c cũng đúng. Chọn d.

$\boxed{13}$ Đường thẳng cần tìm có VTCP (5, –2).

Phương trình : $\frac{x+1}{5} = \frac{y+2}{-2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 5y + 12 = 0$. Chọn b.

$\boxed{14}$ Phương trình (D') qua O và ⊥ (D) : $x + y = 0$.

Tọa độ giao điểm $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad H(-1, 1)$



H trung điểm OO' $\Rightarrow \begin{cases} x_0' = 2x_H - x_0 = -2 \\ y_0' = 2y_H - y_0 = 2 \end{cases}$. Chọn c.

$\boxed{15}$ $M \in \Delta \Rightarrow \exists t : M(2 + t, 3 + t); A(2, 1).$

$\overrightarrow{AM} = (t, t + 2)$

$AM_{min} \Leftrightarrow AM \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{a}(1, 1)$

$\Leftrightarrow t + (t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Vậy M(1, 2). Chọn a.

$\boxed{16}$ Thay x, y của d vào phương trình d' : $2(1 - 4t) + 4(2 + 2t) - 10 = 0$

$\Leftrightarrow 0t = 0$ vô số nghiệm.

Vậy $d \equiv d'$. Chọn b.

$\boxed{17}$ Giao điểm d_1 và d_2 là $I(-2, -1)$.

Yêu cầu bài toán $\Rightarrow I \in d_3 \Rightarrow -2a - 1 - 3 = 0$

$\Rightarrow a = -2.$ Chọn a.

$\boxed{18}$ Xét hệ phương trình $\begin{cases} 1 - 2t = t' \\ 3 + t' = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + t' = 1 \\ t - t' = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{4}{3} \\ t' = \dfrac{4}{3} - 3 = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$

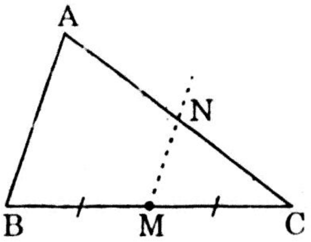
Hệ có nghiệm duy nhất. Vậy d cắt d'. Chọn a.

$\boxed{19}$ Tọa độ A $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ x + 4y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(6, -1)$

Phương trình d qua M và // AB : $2(x - 0) + 1(y - 4) = 0$

Tọa độ N $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 4y = 2 \end{cases} \Rightarrow N(2, 0)$

N là trung điểm AC $\Rightarrow \begin{cases} x_C = 4 - 6 = -2 \\ y_C = 0 + 1 = 1 \end{cases}$. Chọn a.



$\boxed{20}$ Gọi $A\left(a, \dfrac{a}{2}\right) \in d_1$, $B(b, 2b) \in d_2$.

M trung điểm AB $\Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ \dfrac{a}{2} + 2b = \dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a + 4b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

Vậy $A\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$; B(2, 4).

Phương trình (d) : $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{\dfrac{7}{2}} \Leftrightarrow 7(x-2) = 2(y-4)$

$\Leftrightarrow 7x - 2y - 6 = 0.$ Chọn d.

$\boxed{21}$ Tọa độ trọng tâm G $\begin{cases} y = 1 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow G(1, 1).$

$B \in (d_1) : y = 1 \Rightarrow y_B = 1$

Ta có : $y_A + y_B + y_C = 3y_C \Rightarrow 3 + 1 + y_C = 3 \Rightarrow y_C = -1$

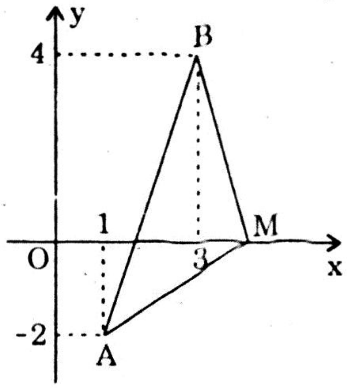
$C \in d_2 \Rightarrow x_C + 2 + 1 = 0 \Rightarrow x_C = -3$

$x_A + x_B + x_C = 3x_G \Rightarrow x_B = 3 - 1 + 3 = 5.$ Chọn d.

$\boxed{22}$ Do $y_A . y_B < 0 \Rightarrow$ A, B nằm về 2 phía đối với x'Ox.

Ta có : $MA + MB \geq AB$

$(MA + MB)_{min} = AB$



Phương trình AB : $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{6}$

Giao điểm AB và x'Ox :

Cho y = 0 $\Rightarrow \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}$

Vậy $M\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$. Chọn b.

$\boxed{23}$ (d) : $\dfrac{x-1}{2} = y + 1 \Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0$

$\delta(A, d) = \dfrac{|1 - 4 - 3|}{\sqrt{5}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$. Chọn c.

$\boxed{24}$ d' // d có dạng : $3x - 4y + c = 0$.

Gọi $O(0, 0) \in d$.

Ta có $\delta(d', d) = \delta(O, d') = 1 \Rightarrow \dfrac{|0 - 0 + c|}{\sqrt{25}} = 1$

$\Rightarrow c = \pm 5.$ Chọn c.

$\boxed{25}$ $\delta(M, d) = \delta(M, d') \Rightarrow \dfrac{|5x + 3y - 3|}{\sqrt{34}} = \dfrac{|5x + 3y + 7|}{\sqrt{34}}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5x + 3y - 3 = 5x + 3y + 7 \text{ (vô nghiệm)} \\ 5x + 3y - 3 = -5x - 3y - 7 \end{array}\right.$

$\Rightarrow 10x + 6y + 4 = 0.$ Chọn a.

26 Phương trình 2 đường phân giác :

$$\frac{|2x + 4y + 7|}{2\sqrt{5}} = \frac{|x - 2y - 3|}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x + 4y + 7 = \pm 2(x - 2y - 3) = 0$$

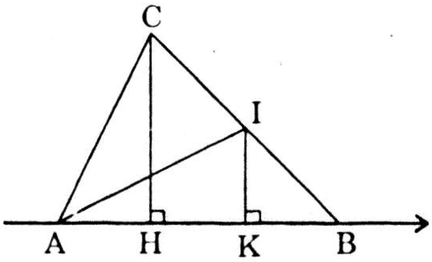
$$\Leftrightarrow \quad 8y + 13 = 0 \vee 4x + 1 = 0.$$ Chọn c.

27 $$\frac{|x - 2y + 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x + y - 1|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2y + 1 = 2x + y - 1 \\ x - 2y + 1 = -2x - y + 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 3y - 2 = 0 \\ 3x - y = 0 \end{array}\right.$$. Chọn b.

28 $Dt\,(\Delta ABC) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}CH.AB = 2\ (AB = 1)$

$$\Rightarrow \quad CH = 4 \quad \Rightarrow \quad IK = 2$$



Gọi $I(m, m) \in (d) : y = x$.

$$IK = \delta(I, AB) = \frac{|m|}{\sqrt{1}} = 2$$

$$\Rightarrow \quad m = \pm 2$$

Vậy $I(2, 2) \vee I(-2, -2)$. Chọn c.

29 $(d) : \sqrt{3}x - 3y + 1 = 0$ có PVT $\vec{n} = (\sqrt{3}, -3)$

$$\Rightarrow \quad \text{VTCP } \vec{a} = (3, \sqrt{3})$$

Gọi γ là góc của (d) và Ox thì :

$$tg\gamma = k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\pi}{6}.$$ Chọn c.

30 (d) có PVT $\vec{n} = (1, -2)$.

(d') có PVT $\vec{m} = (3, -1)$.

$$\cos\gamma = \frac{|3 + 2|}{\sqrt{5}.\sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\pi}{4}.$$ Chọn a.

Bài 4

ĐƯỜNG TRÒN

Vấn đề 1 : LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Dạng 1 : *Phương trình đường tròn tâm I(a, b), bán kính R là :*

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Dạng 2 : *Phương trình :* $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

với $a^2 + b^2 - c > 0$ *là phương trình đường tròn tâm I(a, b)*

bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

BÀI TẬP

Bài 1. *Tuyển sinh Đại học khối A 2007*

Cho ΔABC có A(0, 2); B(−2, 2); C(4, −2).

Gọi H là chân đường cao kẻ từ B. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và AC. Viết phương trình đường tròn qua H, M, N.

GIẢI

Gọi H(x, y), ta có $\overrightarrow{BH} = (x + 2, y + 2)$; $\overrightarrow{AC} = 4(1, -1)$; $\overrightarrow{AH} = (x, y - 2)$

H chân đường cao vẽ từ B $\Leftrightarrow \begin{cases} BH \perp AC \\ AH \text{ cùng phương } AC \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1(x + 2) - 1(y + 2) = 0 \\ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y - 2}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Vậy H(1, 1).

Ta có M(−1, 0); N(1, −2).

Phương trình đường tròn (HMN) dạng : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

H, M, N ∈ đường tròn, ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2 - 2a - 2b + c = 0 \\ 1 + 2a + c = 0 \\ 5 - 2a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{1}{2} \\ c = -2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn qua H, M, N : $x^2 + y^2 - x - y - 2 = 0$. ■

Bài 2. *Tuyển sinh Đại học khối D 2004.*

Cho đường tròn (C) : $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ và (d) : $x - y - 1 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với (C) qua (d). Tìm giao điểm của (C) và (C').

GIẢI

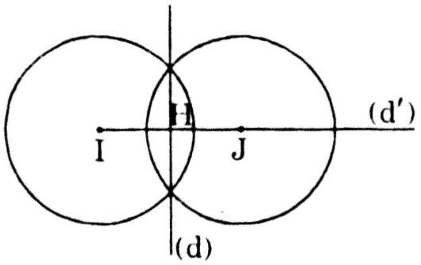
- (C) có tâm I(1, 2), bán kính R = 2

Đường thẳng (d') qua I và vuông góc (d) có PVT : (1, 1).

Phương trình (d') là : $(x-1) + (y-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y - 3 = 0$

Tọa độ giao điểm (d) và (d') là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad \text{Vậy } H(2, 1).$$



Gọi J đối xứng I qua (d) thì H là trung điểm IJ nên :

$$\begin{cases} x_J = 2x_H - x_I = 4 - 1 = 3 \\ y_J = 2y_H - y_I = 2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Do hai đường tròn đối xứng qua trục (d) thì bằng nhau nên phương trình (C') là : $(x-3)^2 + y^2 = 4$.

- Tọa độ giao điểm của (C') và (C) là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 4 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 4 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 4 \\ x = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ (y-2)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 2y^2 - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Do đó (C) cắt (C') tại A(1, 0); B(3, 2). ■

Bài 3. Cho A(−1, 3); B(1, 1); M(2, 4) và đường thẳng (D) : y = 2x.

1. Tìm C ∈ (D) sao cho ΔABC cân tại C.

2. Viết phương trình đường tròn (ABM).

GIẢI

1. Gọi C(c, 2c) ∈ (D) : y = 2x.

- ΔABC cân tại C $\Leftrightarrow \quad CA^2 = CB^2$

$$\Leftrightarrow \quad (c+1)^2 + (2c-3)^2 = (c-1)^2 + (2c-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad c = 2$$

Vậy C(2, 4).

2. Phương trình đường tròn (ABM) có dạng : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

$$A \in (ABM) \Rightarrow 10 + 2a - 6b + c = 0 \qquad (1)$$

$$B \in (ABM) \Rightarrow 2 - 2a - 2b + c = 0 \qquad (2)$$

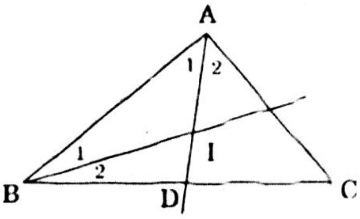
$$C \in (ABM) \Rightarrow -20 + 4a + 8b - c = 0 \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ $a = \frac{3}{4}$; $b = \frac{11}{4}$; $c = 5$.

Vậy phương trình đường tròn (ABM) là : $x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}y + 5 = 0$. ■

Bài 4. Cho A(−1, 7); B(4, −3); C(−4, 1). Viết phương trình đường tròn nội tiếp ΔABC.

GIẢI



Gọi D là chân đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$.

Ta có : $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{5}{3}$

Mà D nằm giữa B và C nên :

$$3\overrightarrow{DB} = -5\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(4 - x_D) = -5(-4 - x_D) \\ 3(-3 - y_D) = -5(1 - y_D) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x_D = -8 \\ 8y_D = -4 \end{cases} \qquad \text{Vậy } D\left(-1, -\frac{1}{2}\right).$$

Gọi I là giao điểm đường phân giác trong của $\widehat{ABC}$ và AD.

Xét ΔABD ta có : $\frac{IA}{ID} = \frac{AB}{BD} = \frac{5\sqrt{5}}{\frac{5\sqrt{5}}{2}} = 2$

Mà I nằm giữa A và D nên :

$$\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x_I = -2(-1 - x_I) \\ 7 - y_I = -2\left(-\frac{1}{2} - y_I\right) \end{cases} \qquad \text{Vậy } I(-1, 2).$$

Phương trình cạnh BC : $\frac{x - 4}{8} = \frac{y + 3}{-4} \Leftrightarrow x + 2y + 2 = 0$

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC thì :

$$r = \delta(I, BC) = \frac{|-1 + 4 + 2|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

Do đó phương trình đường tròn nội tiếp ΔABC là :

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5. \quad ■$$

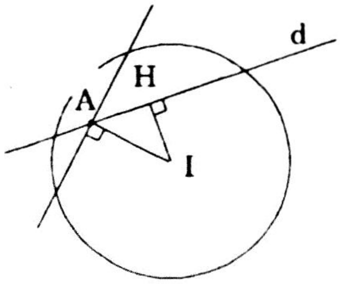
Bài 5. Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ và A(3, 0). Viết phương trình đường thẳng chứa dây cung của đường tròn qua A khi :

a) Dây cung có độ dài lớn nhất. **b)** Dây cung có độ dài nhỏ nhất.

GIẢI

(C) có tâm I(−1, 2), bán kính $R = \sqrt{1 + 4 + 20} = 5$

Ta có : $\mathcal{P}_{A/(C)} = 9 + 6 - 20 < 0 \Rightarrow$ A nằm trong đường tròn (C).



a) Dây cung dài nhất đó là đường kính.

Phương trình đường thẳng AI là :

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y-0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y - 3 = 0.$$

b) Ta có $\delta(I, d) = IH \le IA = \sqrt{20}$

Độ dài dây cung nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ IH dài nhất $\Leftrightarrow$ $H \equiv A$.

Vậy dây cung ngắn nhất qua A là dây ⊥ AI tại A

lúc đó $\overrightarrow{AI} = (-4, 2)$ là VTPT. Vậy phương trình (d) :

$$-4(x-3) + 2(y-0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - y - 6 = 0.$$ ■

Bài 6. Viết phương trình đường thẳng qua gốc tọa độ O và cắt đường tròn : $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$ thành một dây cung có độ dài 8.

GIẢI

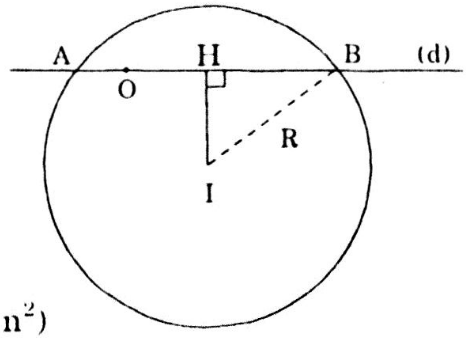
Đường tròn đã cho có tâm I(1, −3), bán kính R = 5.

Ta có : $OI = \sqrt{10} < R = 5$

Vậy O nằm trong đường tròn (I) nên đường thẳng (d) qua O luôn cắt (I) tại 2 điểm phân biệt A, B.

Phương trình đường thẳng (d) qua O và có pháp vectơ (m, n) là :

$$mx + ny = 0 \quad (m^2 + n^2 \ne 0)$$



Vẽ IH ⊥ (d) thì $HA = HB = \dfrac{AB}{2} = 4$

ΔIHB vuông $\Rightarrow$ $IH = \sqrt{R^2 - HB^2} = 3$

Do $IH = \delta(I, d) = 3$ nên :

$$\frac{|m(1) + n(-3)|}{\sqrt{m^2 + n^2}} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad (m - 3n)^2 = 9(m^2 + n^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 8m^2 + 6nm = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 0 \vee m = -\frac{3}{4}n$$

Khi $m = 0$, vậy phương trình đường thẳng (d_1) là $y = 0$.

Khi $m = -\frac{3}{4}n$, chọn $n = -4$ và $m = 3$.

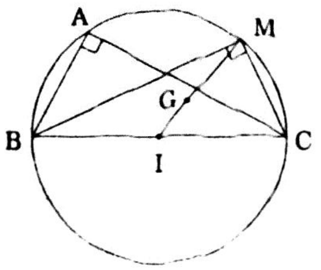
Vậy phương trình $(d_2) : 3x - 4y = 0$. ■

Bài 7. Cho A(3, 1); B(0, 7); C(5, 2).

a) Chứng minh ΔABC vuông và tính diện tích của nó.

b) Giả sử M là điểm chạy trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Chứng minh khi đó trọng tâm G của ΔMBC chạy trên một đường tròn. Viết phương trình chính tắc đường tròn đó.

GIẢI



a) $\overrightarrow{AB} = (-3, 6)$; $\overrightarrow{AC} = (2, 1)$.

Ta có : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ vậy $\Delta ABC \perp$ tại A.

$$S_{(\Delta ABC)} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}\sqrt{45}.\sqrt{5} = \frac{15}{2}.$$

b) Gọi I là trung điểm BC thì $I\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

Ta có G là trọng tâm Δ vuông MBC nên $IG = \frac{1}{3}IM = \frac{1}{6}BC = \frac{5\sqrt{2}}{6}$

G cách đều I cố định một khoảng không đổi $\frac{5\sqrt{2}}{6}$ nên tập hợp điểm G là đường tròn tâm I, bán kính $r = \frac{5\sqrt{2}}{6}$.

Phương trình đường tròn đó là : $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{25}{18}$. ■

Bài 8. Cho họ đường cong $(C_m) : x^2 + y^2 + 4mx - 2my + 2m + 3 = 0$.

1. Định m để (C_m) là đường tròn.

2. Tìm tập hợp tâm các đường tròn (C_m).

GIẢI

1. (C_m) là đường tròn $\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c > 0$

$\Leftrightarrow (-2m)^2 + m^2 - (2m + 3) > 0$

$\Leftrightarrow 5m^2 - 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{3}{5} \vee m > 1.$

2. Tâm I $\begin{cases} x_I = -2m & (1) \\ y_I = m & (2) \end{cases}$

(1), (2) $\Rightarrow \quad x_I + 2y_I = 0$

Giới hạn : $m = -\dfrac{x_I}{2} < -\dfrac{3}{5} \vee m = -\dfrac{x_I}{2} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_I > \dfrac{6}{5} \vee x_I < -2$

Do đó quỹ tích tâm I là đường thẳng có phương trình $x + 2y = 0$

$$\text{với} \quad x < -2 \quad \vee \quad x > \frac{6}{5}. \quad \blacksquare$$

Bài 9. Cho họ đường (C_m) có phương trình :

$$x^2 + y^2 + (m+2)x - (m+4)y + m + 1 = 0.$$

a) Tìm m để (C_m) là đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

b) Chứng minh (C_m) luôn đi qua 2 điểm cố định.

GIẢI

a) Ta có : $a = -\dfrac{m+2}{2}; \quad b = \dfrac{m+4}{2}; \quad c = m + 1.$

- (C_m) là đường tròn $\Leftrightarrow \left(\dfrac{m}{2}+1\right)^2 + \left(\dfrac{m}{2}+2\right)^2 - m - 1 > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2}{2} + 2m + 4 > 0 \quad \forall m \in R.$$

Lúc đó $R^2 = \dfrac{1}{2}(m^2 + 4m + 8) = \dfrac{1}{2}[(m+2)^2 + 4] \geq 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = -2$

Do đó $R_{min} = \sqrt{2}$ khi $m = -2$.

b) $M(x_o, y_o) \in (C_m)\ \forall m$.

$\Leftrightarrow (x_o - y_o + 1)m + x_o^2 + y_o^2 + 2x_o - 4y_o + 1 = 0 \quad \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o - y_o + 1 = 0 \\ x_o^2 + y_o^2 + 2x_o - 4y_o + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_o = x_o + 1 \\ x_o^2 + (x_o+1)^2 + 2x_o - 4(x_o+1) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_o = x_o + 1 \\ 2x_o^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = 1 \\ y_o = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_o = -1 \\ y_o = 0 \end{cases}$$

Do đó (C_m) luôn đi qua 2 điểm cố định : A(1, 2); B(−1, 0). $\blacksquare$

Bài 10. Cho họ đường cong (C_m) : $x^2 + y^2 + 2mx - 6y + 4 - m = 0$.

a) Chứng minh (C_m) là đường tròn với mọi m. Hãy tìm tập hợp tâm các đường tròn (C_m) khi m thay đổi.

b) Với m = 4. Hãy viết phương trình đường thẳng vuông góc với đường thẳng $(\Delta) : 3x - 4y + 10 = 0$ và cắt đường tròn tại 2 điểm A, B sao cho $AB = 6$.

GIẢI

a) Ta có : $a = -m;\ b = 3$ và $c = 4 - m$

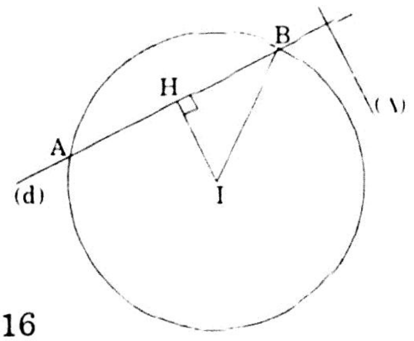
Do $\quad a^2 + b^2 - c = m^2 + 9 - (4 - m) = m^2 + m + 5 > 0\ \forall m \in R$

Vậy (C_m) luôn là đường tròn $\forall m$.

Gọi I là tâm của (C_m) thì $I\begin{cases} x_I = -m \\ y_I = 3 \end{cases}$

Do đó tập hợp các tâm I là đường thẳng có phương trình : $y = 3$.

b) Khi m = 4 thì tâm I(−4, 3) và bán kính $R = \sqrt{16 + 4 + 5} = 5$.



Phương trình đường thẳng (d) vuông góc (Δ) có dạng : $4x + 3y + c = 0$

Vẽ $IH \perp AB$ thì $HA = HB = \dfrac{AB}{2} = 3$

ΔIHB vuông $\Rightarrow \quad IH^2 = IB^2 - HB^2 = 25 - 9 = 16$

$\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \quad IH = 4$

Mà IH chính là khoảng cách từ I đến (d).

Do đó $\delta(I, d) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{|4(-4) + 3(3) + c|}{5} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad |c - 7| = 20$

$\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \quad c - 7 = \pm 20 \quad \Leftrightarrow \quad c = 27$ hay $c = -13$

Vậy phương trình (d) là : $\left[\begin{array}{l} 4x + 3y + 27 = 0 \\ 4x + 3y - 13 = 0. \end{array}\right.$ ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. *Dự bị khối D 2005*

Cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ có tâm I, bán kính R.

Tìm $M \in (d) : 2x - y + 3 = 0$ mà $MI = 2R$.

BT2. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC với A(1, 1) B(−1, 2); C(0, −1).

BT3. Cho A(2, −4); $B\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$; C(6, 0).

Tìm tọa độ tâm và tính bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.

BT4. Viết phương trình đường tròn :

a) Qua $A(-2, 4)$; $B(5, 5)$ và có tâm nằm trên đường thẳng (d) :

$$4x - 5y - 3 = 0.$$

b) Tâm $I(3, 2)$ và cắt (D) : $x - 3y + 8 = 0$ theo một dây cung có độ dài 10.

c) Qua $A(1, -2)$ và các giao điểm của (Δ) : $x - 7y + 10 = 0$

với đường tròn : $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

BT5. Cho $A(1, 2)$; $B(0, 1)$; $C(-2, 1)$.

a) Viết phương trình đường thẳng AB.

b) Viết phương trình đường cao CH của ΔABC.

c) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

BT6. Cho $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

a) Viết phương trình đường tròn (C) đường kính OM.

b) Viết phương trình đường thẳng (D) qua M và cắt 2 nửa trục dương Ox, Oy tại A và B sao cho diện tích ΔOAB bằng 6.

c) Tìm tọa độ tâm I của đường tròn nội tiếp ΔOAB. Viết phương trình đường tròn đó.

BT7. Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác có 3 cạnh nằm trên 3 đường thẳng : $y = \frac{x}{5} - \frac{2}{5}$; $y = x + 2$ và $y = 8 - x$.

BT8. Cho 2 đường thẳng $(\Delta_1) : 4x - 3y - 12 = 0$; $(\Delta_2) : 4x + 3y - 12 = 0$

a) Tìm tọa độ các đỉnh tam giác có 3 cạnh nằm trên Δ_1, Δ_2 và Oy.

b) Tìm tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác trên.

BT9. Cho đường thẳng : $y - 2x + 1 = 0$ cắt đường tròn :

$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ tại 2 điểm M, N.

Tính độ dài đoạn MN.

BT10. Lập phương trình đường tròn qua $M(-1, -2)$ và các giao điểm của đường thẳng (d) : $x + 7y + 10 = 0$ với đường tròn (C) : $x^2 + y^2 + 4x - 20 = 0$.

BT11. Cho họ $(C_m) : x^2 + y^2 - (m - 2)x + 2my - 1 = 0$.

a) Tìm tập hợp tâm các đường tròn (C_m).

b) Tìm các điểm cố định mà (C_m) luôn đi qua.

BT12. Cho họ đường tròn (C_α) :

$$x^2 + y^2 - 4x\cos\alpha - 2y\sin\alpha + 3\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha = 0$$

a) Chứng minh (C_α) luôn là đường tròn $\forall\alpha$.

b) Tìm quỹ tích tâm các đường tròn (C_α).

BT13. Cho họ đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2my = 0$

và họ đường thẳng (d) : $y = -mx + m$.

a) Chứng minh (d) đi qua tâm của (C) và qua một điểm cố định.

b) Tìm quỹ tích giao điểm của (d) và (C).

BT14. Cho họ đường tròn (C_m) : $x^2 + y^2 - 2mx + 2(m + 1)y - 12 = 0$

a) Tìm quỹ tích tâm của họ đường tròn trên.

b) Với giá trị nào của m thì bán kính của họ đường tròn đã cho là nhỏ nhất.

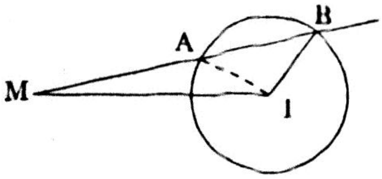
c) Khi $m = 2$. Vẽ đường tròn (C_2). Cho đường thẳng (D) : $3x - 4y + 12 = 0$. Tìm khoảng cách ngắn nhất của (D) và (C_2).

Vấn đề 2 : PHƯƠNG TÍCH – TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

1. • ***Định nghĩa :***

Cho đường tròn (I, R), điểm M cố định. Một đường thẳng di động qua M cắt đường tròn tại A, B. Phương tích từ điểm M đến đường tròn (I, R) là

$$\mathcal{P}_{M/(I)} = \overline{MA}.\overline{MB} = IM^2 - R^2$$



• ***Định lý :***

Nếu đường tròn có phương trình :

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

thì phương tích từ điểm $M_o(x_o, y_o)$ đối với đường tròn đó là

$$\boxed{\mathcal{P}_{M_o/(C)} = F(x_o, y_o) = x_o^2 + y_o^2 - 2ax_o - 2by_o + c}$$

• ***Chú ý :*** *Nếu $\mathcal{P}_{M_o/(C)} > 0$ thì M_o ở ngoài đường tròn (I, R).*

Nếu $\mathcal{P}_{M_o/(C)} < 0$ thì M_o ở trong đường tròn (I, R).

2. • ***Định nghĩa :***

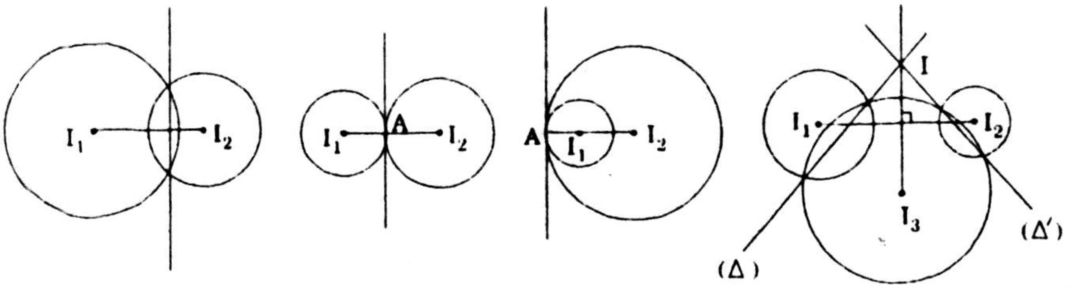
Cho 2 đường tròn không đồng tâm (I_1, R_1) và (I_2, R_2). Trục đẳng phương của hai đường tròn (I_1) và (I_2) là quỹ tích những điểm có cùng phương tích đối với 2 đường tròn đó.

- ***Chú ý :***

+ Nếu 2 đường tròn cắt nhau tại A và B thì trục đẳng phương là đường thẳng AB.

+ Nếu 2 đường tròn tiếp xúc nhau trong tại A thì trục đẳng phương là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn tại A.

+ Nếu 2 đường tròn không cắt nhau. Vẽ đường tròn thứ ba cắt cả 2 đường tròn sao cho 3 tâm không thẳng hàng. Vẽ Δ là trục đẳng phương của (I_1) và (I_3). Vẽ Δ' là trục đẳng phương của (I_2) và (I_3). Δ cắt Δ' tại I. Thì đường thẳng qua I và $\perp I_1I_2$ chính là trục đẳng phương của (I_1) và (I_2).



- *Cho 2 đường tròn không đồng tâm (C_1), (C_2) có phương trình :*

$$x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2 = 0$$

Gọi (Δ) là trục đẳng phương của (C_1), (C_2) thì

$$M(x, y) \in (\Delta) \Leftrightarrow \mathcal{P}_{M/(C_1)} = \mathcal{P}_{M/(C_2)}$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 = x^2 + y^2 - 2a_2x + 2b_2y + c_2$$
$$\Leftrightarrow 2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + c_2 - c_1 = 0.$$

BÀI TẬP

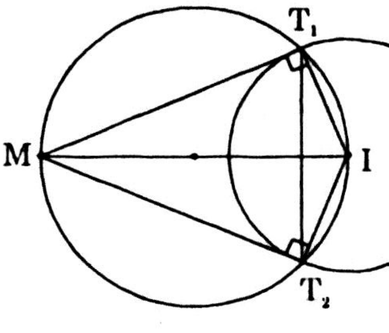
Bài 11. *Tuyển sinh ĐH khối B 2006*

Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$.

Gọi T_1, T_2 là các tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M(–3; 1) đến (C).

Viết phương trình đường thẳng qua T_1T_2.

GIẢI



(C) có tâm I(1, 3); $R = \sqrt{1 + 9 - 6} = 2$.

Đường tròn (C') đường kính MI có tâm

$J(-1, 2)$; $R' = \dfrac{MI}{2} = \dfrac{\sqrt{16 + 4}}{2} = \sqrt{5}$.

Phương trình (C') : $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$$

T_1T_2 chính là trục đẳng phương của (C) và (C').

Phương trình T_1T_2 : $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = x^2 + y^2 + 2x - 4y$

$$\Leftrightarrow \quad 4x + 2y - 6 = 0.$$ ■

Bài 12. *Dự bị khối D 2005*

Cho đường tròn $(C_1) : x^2 + y^2 = 9$ và $(C_2) : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$ có tâm I. Gọi (d) là trục đẳng phương của (C_1) và (C_2). Lấy $K \in (d)$.

Chứng minh KO < KI.

GIẢI

Phương trình trục đẳng phương của (C_1) và (C_2) :

$$x^2 + y^2 - 9 = x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 \quad \Leftrightarrow \quad x + y + 7 = 0 \ (d)$$

Gọi $K(k, -k - 7) \in (d)$; tâm của (C_2) là $I(1, 1)$.

$$KO^2 < KI^2 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 + (k + 7)^2 < (k - 1)^2 + (k + 8)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2k^2 + 14k + 49 < 2k^2 + 14k + 65$$

$\Leftrightarrow \quad 49 < 65$ luôn đúng. ■

Bài 13. Cho 2 họ đường tròn (C_m) và (C'_m) có phương trình :

$$(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx + 2(m + 1)y - 1 = 0$$

$$(C'_m) : x^2 + y^2 - x + (m - 1)y + 3 = 0$$

Chứng minh trục đẳng phương của 2 đường tròn (C_m), (C'_m) luôn luôn đi qua 1 điểm cố định.

GIẢI

Phương trình trục đẳng phương của (C_m) và (C'_m) là :

$$x^2 + y^2 - 2mx + 2(m + 1)y - 1 = x^2 + y^2 - x + (m - 1)y + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - 2m)x + (m + 3)y - 4 = 0 \quad (d)$$

$M(x_o, y_o)$ là điểm cố định của (d) $\Leftrightarrow$ $M(x_o, y_o) \in (d)\ \forall m$

$$\Leftrightarrow \quad (-2x_o + y_o)m + x_o + 3y_o - 4 = 0 \ \forall m$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x_o + y_o = 0 \\ x_o + 3y_o - 4 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_o = \dfrac{4}{7} \\ y_o = \dfrac{8}{7} \end{cases}$$

Vậy (d) luôn qua điểm cố định $I\left(\dfrac{4}{7}, \dfrac{8}{7}\right)$. ■

Bài 14. Cho phương trình : $F(x, y) = x^2 + y^2 - 2(x - a)m = 0 \quad (C_m)$

với $a > 0$ cho trước.

a) Tìm m để (C_m) là đường tròn.

b) Cho $A(2a, 0)$ chứng minh đoạn OA luôn luôn cắt đường tròn (C_m).

c) Chứng minh tồn tại 1 đường thẳng là trục đẳng phương của mọi đường tròn (C_m).

GIẢI

a) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 2mx + 2am$

(C_m) là đường tròn $\Leftrightarrow \quad m^2 + 0^2 - 2am > 0$

$\Leftrightarrow \quad m < 0 \vee m > 2a \quad$ (do $a > 0$).

b) Ta có : $\mathcal{P}_{O/(C_m)}.\mathcal{P}_{A/(C_m)} = 2am(4a^2 - 4am + 2am)$

$= 8a^3m - 4a^2m^2 = -4a^2(m^2 - 2am) < 0$

vì (C_m) là đường tròn $\Leftrightarrow \quad m^2 - 2am > 0$

Do đó đoạn OA luôn cắt đường tròn (C_m).

c) $\forall m_1, m_2 \in R$ mà $\quad m_1, m_2 \in (-\infty, 0) \cup (2a, +\infty)$

và $\quad m_1 \neq m_2$

Phương trình trục đẳng phương của 2 đường tròn $(C_{m_1}), (C_{m_2})$ là :

$$x^2 + y^2 - 2m_1x + 2m_1a = x^2 + y^2 - 2m_2x + 2m_2a$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(m_2 - m_1)x - 2(m_2 - m_1)a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - a = 0$$

Vậy đường thẳng (d) có phương trình $x = a$ là trục đẳng phương của mọi đường tròn (C_m). ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT15. Cho : $\quad y = x^3 - 2x^2 + 2 \quad (C)$

và đường tròn : $x^2 + y^2 - 2ax - 4ay + 5a^2 - 1 = 0 \quad (T)$

Tìm a để điểm cực đại và cực tiểu của (C) ở về 2 phía đối với đường tròn (T) (phía trong và phía ngoài).

BT16. Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 31 = 0$ và $A(3, 2)$.

a) Chứng minh A nằm ngoài đường tròn (C).

b) Từ A vẽ 2 tiếp tuyến AM và AN đến (C) với M, N là 2 tiếp điểm. Viết phương trình đường thẳng MN.

BT17. Cho 2 đường tròn : $(C_1) : x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$

$(C_2) : x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$

a) Chứng minh (C_1), (C_2) cắt nhau tại A và B.

b) Viết phương trình đường thẳng qua A, B.

BT18. Cho đường tròn $(C_m) : x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 - m^2 = 0$.

a) Chứng minh I(5, 2) luôn luôn nằm trong đường tròn (C_m).

b) Viết phương trình đường thẳng cắt (C) tại 2 điểm M, N sao cho IM = IN.

Vấn đề 3 : VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN – VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

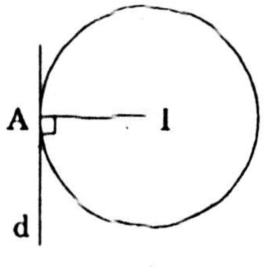
Phương pháp :

- ***Cho đường thẳng (D) và đường tròn tâm I(a, b); bán kính R.***

(D) và (I, R) cắt nhau	⇔	$\delta(I, D) < R$
(D) và (I, R) tiếp xúc nhau	⇔	$\delta(I, D) = R$
(D) và (I, R) không có điểm chung	⇔	$\delta(I, D) > R$.

Chú ý :

- *Muốn viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (I, R) tại A ta viết phương trình đường thẳng qua A và có pháp vectơ là* $\overrightarrow{IA}$.
- *Muốn viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn phát xuất từ A. Ta viết phương trình đường thẳng (d) qua A và có pháp vectơ (m, n).*
  Sử dụng : (d) tiếp xúc (I, R) ⇔ $\delta(I, D) = R$.
  Từ đó định được m và n.



BÀI TẬP

Bài 15. Biện luận theo m vị trí tương đối của đường thẳng Δ và đường tròn có phương trình sau : $(\Delta) : \ mx - y - 2m + 3 = 0$

$$(C) : \ x^2 + y^2 - 2x + \frac{4}{5} = 0.$$

GIẢI

Đường tròn (C) có tâm I(1, 0) và bán kính $R = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Ta có $\delta(I, \Delta) = \dfrac{|m - 2m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \dfrac{|3 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}}$

- (Δ) cắt (C) $\Leftrightarrow$ $\delta(I, \Delta) = \dfrac{|3 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} < R = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

  $\Leftrightarrow$ $5(9 - 6m + m^2) < m^2 + 1$

  $\Leftrightarrow$ $2m^2 - 15m + 22 < 0$ $\Leftrightarrow$ $2 < m < \dfrac{11}{2}$.

- (Δ) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow$ $\delta(I, \Delta) = R$ $\Leftrightarrow$ $2m^2 - 15m + 22 = 0$

  $\Leftrightarrow$ $m = 2 \vee m = \dfrac{11}{2}$.

- $(\Delta) \cap (C) = \varnothing$ $\Leftrightarrow$ $\delta(I, \Delta) > R$ $\Leftrightarrow$ $m < 2 \vee m > \dfrac{11}{2}$. ■

Bài 16. *Dự bị khối D 2006*

Viết phương trình đường tròn qua $O(0, 0)$; $A(-1, 1)$ và tiếp xúc $(d) : x - y + 1 + \sqrt{2} = 0$.

GIẢI

Gọi $I(a, b)$ là tâm đường tròn.

Ta có $OI^2 = IA^2$ $\Rightarrow$ $a^2 + b^2 = (a + 1)^2 + (b - 1)^2$

$\Rightarrow$ $a - b + 1 = 0$ $\Rightarrow$ $a = b - 1$

Vậy $I(b - 1, b)$.

Do đường tròn (I, R) tiếp xúc d $\Rightarrow$ $\delta(I, d) = R = OI$

$$\Rightarrow \quad \frac{|(b - 1) - b + 1 + \sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = \sqrt{(b - 1)^2 + b^2}$$

$\Rightarrow$ $1 = \sqrt{2b^2 - 2b + 1}$ $\Rightarrow$ $2b^2 - 2b = 0$ $\Rightarrow$ $b = 0 \vee b = 1$

Vậy $I_1(-1, 0)$ thì $R_1 = OI = 2$ $\Rightarrow$ $(C_1) : (x + 1)^2 + y^2 = 4$

$I_2(0; 1)$ thì $R_2 = OI = \sqrt{2}$. $\Rightarrow$ $(C_2) : x^2 + (y - 1)^2 = 2$. ■

Bài 17. Viết phương trình đường tròn qua $A(2, -1)$ và tiếp xúc trục hoành, trục tung.

GIẢI

Gọi $I(a, b)$ là tâm đường tròn.

(I, R) tiếp xúc x'Ox và y'Oy $\Leftrightarrow$ $\delta(I, x'Ox) = \delta(I, y'Oy) = R$

$\Leftrightarrow$ $|a| = |b| = R$

- Nếu $a = b$ thì phương trình đường tròn có dạng : $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$

  $A(2, -1) \in (I, R)$ $\Leftrightarrow$ $(2 - a)^2 + (-1 - a)^2 = a^2$

  $\Leftrightarrow$ $a^2 - 2a + 5 = 0$ vô nghiệm.

- Nếu $a = -b$ thì phương trình đường tròn có dạng : $(x - a)^2 + (y + a)^2 = a^2$

$A \in (I, R) \quad \Leftrightarrow \quad (2 - a)^2 + (-1 + a)^2 = a^2$

$\Leftrightarrow \quad a^2 - 6a + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1 \vee a = 5$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm : $\left[\begin{array}{l}(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 \\ (x-5)^2 + (y+5)^2 = 25.\end{array}\right.$ ■

Bài 18. Viết phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng (d_1): $4x + 3y - 2 = 0$ và tiếp xúc 2 đường thẳng $(d_2) : x + y + 4 = 0$ và $(d_3) : 7x - y + 4 = 0$.

GIẢI

Gọi $I(a, b)$ là tâm đường tròn, do $I \in d_1$ nên : $4a + 3b - 2 = 0$ (1)

Do đường tròn (I, R) tiếp xúc 2 đường thẳng d_2 và d_3 nên :

$$\delta(I, d_2) = \delta(I, d_3) \Leftrightarrow \frac{|7a - b + 4|}{5\sqrt{2}} = \frac{|a + b + 4|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5(a + b + 4) = 7a - b + 4 \\ 5(a + b + 4) = -7a + b - 4\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}a - 3b = 8 & (2) \\ 3a + b = -6 & (2')\end{array}\right.$$

- Từ (1), (2) ta có : $\begin{cases}4a + 3b = 2 \\ a - 3b = 8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 2 \\ b = -2\end{cases}$

Lúc đó $\quad R = \delta(I, d_1) = \dfrac{|2 - 2 + 4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

Vậy phương trình đường tròn là : $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$.

- Từ (1), (2') ta có : $\begin{cases}4a + 3b = 2 \\ 3a + b = -6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = -4 \\ b = 6\end{cases}$

Lúc đó $\quad R = \delta(I, d_1) = \dfrac{|-4 + 6 + 4|}{\sqrt{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$.

Vậy phương trình đường tròn là : $(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 18$. ■

Bài 19. Cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ và $A(3, 5)$.

Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) vẽ từ A.

Giả sử các tiếp tuyến đó tiếp xúc (C) tại M, N.

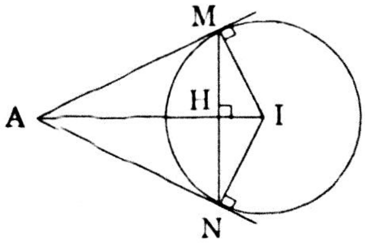
Tính độ dài đoạn MN và viết phương trình đường thẳng (MN).

GIẢI

Đường tròn (C) có tâm I(–1, 2) và bán kính R = 3.

Phương trình đường thẳng (d) qua A và có pháp vectơ (m, n) :

$$m(x-3)+n(y-5)=0 \quad (d)$$



$$(d) \text{ tiếp xúc } (C) \Leftrightarrow \delta(I, d) = R \Leftrightarrow \frac{|-4m-3n|}{\sqrt{m^2+n^2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow 16m^2+24mn+9n^2 = 9(m^2+n^2)$$

$$\Leftrightarrow 7m^2+24mn = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \vee m = -\frac{24n}{7}$$

- $m = 0$ thì phương trình tiếp tuyến qua A là : $y - 5 = 0$.
- $m = -\frac{24n}{7}$, chọn $n = -7 \wedge m = 24$ thì phương trình tiếp tuyến qua A là :

$$24(x-3)-7(y-5)=0 \Leftrightarrow 24x-7y-37=0$$

ΔAMI vuông tại M $\Rightarrow AM^2 = AI^2 - R^2 = 25 - 9 = 16$

Ta có : $MN = 2MH = \frac{2MA.MI}{AI} = \frac{2(4).(3)}{5} = \frac{24}{5}$

Viết phương trình đường thẳng (MN) ?

* **Cách 1 :**

Đường tròn đường kính AI có tâm $J\left(1, \frac{7}{2}\right)$ và $r = \frac{AI}{2} = \frac{5}{2}$. Vậy phương trình đường tròn đường kính AI là :

$$(x-1)^2 + \left(y-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-7y+7=0$$

Đường thẳng (MN) cần tìm chính là trục đẳng phương của 2 đường tròn đường kính AI và (I) :

$$x^2+y^2+2x-4y-4 = x^2+y^2-2x-7y+7 \Leftrightarrow 4x+3y-11=0.$$

* **Cách 2 :** Gọi $M(x_1, y_1)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là :

$$xx_1+yy_1+x+x_1-2(y+y_1)-4=0$$

Do tiếp tuyến qua A(3, 5) nên $3x_1+5y_1+3+x_1-2(5+y_1)-4=0$

$$\Leftrightarrow 4x_1+3y_1-11=0 \quad (1)$$

Tương tự gọi $N(x_2, y_2)$.

Do tiếp tuyến qua A(3, 5) nên : $4x_2+3y_2-11=0$ (2)

Vậy phương trình (MN) là : $4x + 3y - 11 = 0$

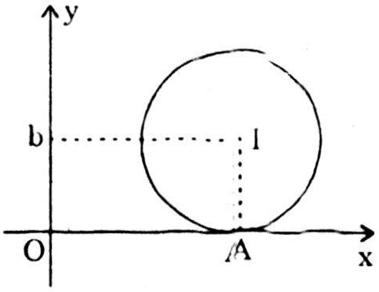
(vì tọa độ M và N đều nghiệm đúng phương trình). ■

* ***Ghi chú :*** Có thể tìm được tọa độ 2 tiếp điểm M, N rồi viết phương trình MN. Nhưng điều này dài dòng và thường khi nhiều khó khăn trong việc tính toán.

Bài 20. *Tuyển sinh ĐH khối B 2005*

Viết phương trình đường tròn tiếp xúc trục hoành tại A(2, 0) và khoảng cách từ tâm I đến B(6, 4) bằng 5.

GIẢI



Gọi I(a, b).

Do (I, R) tiếp xúc x'Ox tại A nên

$$x_A = x_I = 2 \text{ và } R = |y_I| = |b|$$

Do $IB^2 = 25 \Rightarrow (6-2)^2 + (4-b)^2 = 25$

$\Rightarrow (4-b)^2 = 3^2$

$\Rightarrow 4 - b = \pm 3 \Rightarrow b = 1 \vee b = 7$

- $b = 1$ mà $R = |b| = 1$ nên $(C_1) : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$.
- $b = 7$ mà $R = |b| = 7$ nên $(C_2) : (x-2)^2 + (y-7)^2 = 7^2$. ■

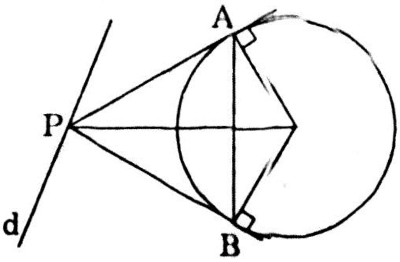
Bài 21. *Tuyển sinh ĐH khối D 2007*

Cho đường tròn (C) : $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ và (d) : $3x - 4y + m = 0$.

Tìm m để trên (d) có duy nhất điểm P mà từ đó vẽ được 2 tiếp tuyến BA, PB trên (C) sao cho ΔPAB đều.

GIẢI

(C) có tâm I(1, −2), R = 3.



ΔPAB đều $\Rightarrow \widehat{API} = 30^0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{AI}{PI} \Rightarrow PI = 6$

Vậy P nằm trên (C') tâm I, R' = PI = 6.

Mà theo giả thiết $P \in d$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ d và (C') tiếp xúc

$\Leftrightarrow \delta(I, d) = R' \Leftrightarrow \dfrac{|3(1) - 4(-2) + m|}{\sqrt{9+16}} = 6$

$\Leftrightarrow |11 + m| = 30$

$\Leftrightarrow m + 11 = \pm 30 \Leftrightarrow m = 19$ hay $m = -41$ ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT19. Cho 2 đường thẳng $(d_1) : 3x + 4y + 5 = 0$ và $(d_2) : 4x - 3y - 5 = 0$.

Viết phương trình đường tròn có tâm nằm trên $(\Delta) : x - 6y - 10 = 0$ và tiếp xúc 2 đường thẳng d_1, d_2.

BT20. Cho $(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx - 2(1 - m)y + 2m^2 - 2m - 3 = 0$.

a) Tìm quỹ tích tâm các đường tròn (C_m).

b) Cho $m = 2$ và $A(0, 3)$ viết phương trình các tiếp tuyến của (C_2) vẽ từ A.

BT21. Cho họ đường tròn (C_m) có phương trình :

$$x^2 + y^2 + 2(m - 1)x - 2(m - 2)y + m^2 - 8m + 13 = 0$$

a) Tìm tất cả các giá trị của m để (C_m) là đường tròn. Tìm quỹ tích tâm I các đường tròn (C_m) khi m thay đổi.

b) Cho $m = 4$. Viết phương trình tiếp tuyến kẻ từ $A(1, 5)$ đến đường tròn (C_4).

BT22. 1. Cho $A(3, -2)$ và đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) vẽ từ A và tìm tọa độ tiếp điểm.

2. Lập phương trình đường tròn tâm $I(4, 3)$ và tiếp xúc đường thẳng $(d) : x + 2y - 5 = 0$.

BT23. Cho $(C_m) : x^2 + y^2 - (m - 2)x + 2my - 1 = 0$.

a) Tìm tập hợp tâm các đường tròn (C_m).

b) Chứng minh khi m thay đổi thì (C_m) luôn qua 2 điểm cố định.

c) Cho $m = -2$ và $A(0, -1)$. Viết phương trình các tiếp tuyến của đường tròn (C_{-2}) đi qua A.

BT24. Xác định các đường thẳng tiếp xúc hai đường tròn :

$$(C) : x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0 \quad \text{và} \quad (C') : x^2 + y^2 - 12x - 6y + 44 = 0.$$

BT25. Cho họ đường tròn (C_α) :

$$(x^2 + y^2)\sin\alpha = 2(x\cos\alpha + y\sin\alpha - \cos\alpha) \quad \text{với } \alpha \neq k\pi.$$

a) Chứng minh (C_α) luôn là đường tròn khi α thay đổi.

b) Chứng minh (C_α) luôn có 1 tiếp tuyến cố định.

BT26. Cho họ đường tròn $(C_m) : x^2 + y^2 - 4mx - 2my + \dfrac{9m^2}{2} - m - \dfrac{1}{2} = 0$

a) Tìm tập hợp tâm của họ (C_m).

b) Chứng minh (C_m) luôn tiếp xúc với 2 đường thẳng cố định.

BT27. Cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$

và họ đường thẳng $(\Delta) : x + 3y + m = 0$.

a) Biện luận theo m vị trí tương đối (Δ) và (C).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) mà vuông góc Δ.

BT28. *Dự bị khối D 2002*

Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ và (d) : $x - y + 1 = 0$.

Tìm M ∈ d sao cho từ M vẽ 2 đường thẳng tiếp xúc (C) tại A và B mà ΔMAB đều.

BT29. *Dự bị khối B 2003*

Viết phương trình đường tròn tâm I ∈ d : $2x + y = 0$ và tiếp xúc Δ : $x - 7y + 10 = 0$ tại A(4, 2).

Vấn đề 4 : VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp :

Cho đường tròn (C_1) có tâm I_1 và bán kính R_1

Đường tròn (C_2) có tâm I_2 và bán kính R_2

- ***(C_1) cắt (C_2)*** ⇔ $|R_1 - R_2| < d = I_1I_2 < R_1 + R_2$
- ***(C_1) tiếp xúc ngoài (C_2)*** ⇔ $d = I_1I_2 = R_1 + R_2$
- ***(C_1) tiếp xúc trong (C_2)*** ⇔ $d = I_1I_2 = |R_1 - R_2|$
- ***(C_1) (C_2) ở ngoài nhau*** ⇔ $d > R_1 + R_2$
- ***(C_1) và (C_2) đựng nhau*** ⇔ $d < |R_1 - R_2|$.

BÀI TẬP

Bài 22. *Tuyển sinh khối D 2006*

Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

Tìm M ∈ (d) : $x - y + 3 = 0$ sao cho đường tròn tâm M có bán kính gấp đôi đường tròn (C) và tiếp xúc ngoài (C).

GIẢI

(C) có tâm I(1, 1); $R = \sqrt{1 + 1 - 1} = 1$.

Gọi M(m, m + 3) ∈ d.

Ta có : (C) và (C') tiếp xúc ngoài

$$\Leftrightarrow IM = R + R'$$
$$\Leftrightarrow (m - 1)^2 + (m + 2)^2 = (1 + 2)^2$$
$$\Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow m = 1 \vee m = -2.$$

Vậy M(1, 4); M(−2, 1). ■

Bài 23. Cho (d) : $\sqrt{2}x + my + 1 - \sqrt{2} = 0$;

$(C_1) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$; $(C_2) : x^2 + y^2 + 4x - 4y - 56 = 0$.

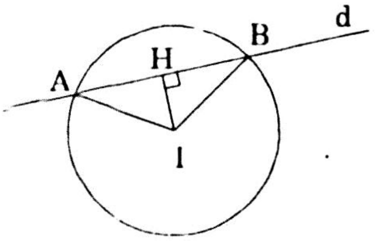
a) Gọi I là tâm đường tròn (C_1). Tìm m sao cho (d) cắt (C_1) tại 2 điểm phân biệt A, B. Với giá trị nào của m thì diện tích ΔIAB lớn nhất ? Tính giá trị lớn nhất đó.

b) Chứng minh (C_1) tiếp xúc (C_2). Viết phương trình của tất cả tiếp tuyến chung của (C_1), (C_2).

GIẢI

a) • Ta có I(1, –2) ; bán kính R = 3.

(d) cắt (C_1) tại 2 điểm phân biệt A, B



$$\Leftrightarrow \quad \delta(I, d) < R$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{|\sqrt{2} - 2m + 1 - \sqrt{2}|}{\sqrt{2 + m^2}} < 3$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 4m + 4m^2 < 9(m^2 + 2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 5m^2 + 4m + 17 > 0 \quad \forall m \in R$$

• $D_t(\Delta IAB) = \frac{1}{2} IA.IB \sin\widehat{AIB} = \frac{9}{2}\sin\widehat{AIB} \le \frac{9}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sin\widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ$

$$\Leftrightarrow \quad IH = IA\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|1 - 2m|}{\sqrt{2 + m^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(1 - 4m + 4m^2) = 18(2 + m^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2m^2 + 16m + 32 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = -4.$$

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích (ΔIAB) = $\frac{9}{2}$ khi m = –4.

b) **Đường tròn (C_2) có tâm J(–2, 2) ; bán kính R' = 8**

Ta có : $IJ = \sqrt{9 + 16} = 5 = R' - R$

Vậy (C_1) và (C_2) tiếp xúc trong.

Do đó đường tiếp tuyến chung của (C_1), (C_2) chính là trục đẳng phương của (C_1), (C_2). Phương trình tiếp tuyến chung là :

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = x^2 + y^2 + 4x - 4y - 56$$

$$\Leftrightarrow \quad 6x - 8y - 52 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 4y - 26 = 0. \ ■$$

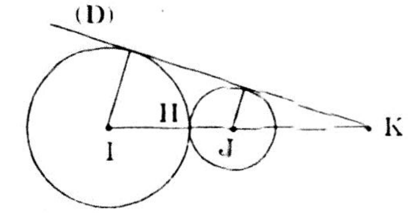
Bài 24. Cho 2 đường tròn $(C_1) : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ có tâm I

$(C_2) : x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0$ có tâm J.

a) Chứng minh (C_1) tiếp xúc ngoài (C_2). Tìm tọa độ tiếp điểm H.

b) Gọi (D) là tiếp tuyến chung không đi qua H của (C_1), (C_2). Tìm tọa độ giao điểm K của (D) và IJ. Viết phương trình đường tròn (C) qua K và tiếp xúc (C_1), (C_2) tại H.

GIẢI



a) • Ta có tâm $I(2, -1)$; bán kính $R_1 = 3$

tâm $J(5, 3)$; $R_2 = 2$

$IJ = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Do $d = IJ = R_1 + R_2 = 5$ nên (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài.

• Ta có : $\dfrac{HI}{HJ} = \dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{3}{2}$ Vậy $\overrightarrow{HI} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{HJ}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x_H = -\dfrac{3}{2}(5 - x_H) \\ -1 - y_H = -\dfrac{3}{2}(3 - y_H) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \dfrac{19}{5} \\ y_H = \dfrac{7}{5} \end{cases}$$

Vậy tiếp điểm $H\left(\dfrac{19}{5}, \dfrac{7}{5}\right)$.

b) Ta có : $\dfrac{KJ}{KI} = \dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{2}{3}$ Vậy $\overrightarrow{KJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{KI}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x_K = \dfrac{2}{3}(2 - x_K) \\ 3 - y_K = \dfrac{2}{3}(-1 - y_K) \end{cases}$$ Vậy $K(11, 11)$.

Đường tròn (C) qua H, K nên tâm M của (C) ∈ đường trung trực của HK. Mặt khác do tính chất 2 đường tròn tiếp xúc nên M nằm trên đường nối tâm IJ.

Vậy tâm M là trung điểm HK và bán kính $R = \dfrac{HK}{2}$

$$M\begin{cases} x_M = \dfrac{\dfrac{9}{5} + 11}{2} = \dfrac{37}{5} \\ y_M = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{7}{5} + 11\right) = \dfrac{31}{5} \end{cases}$$

$$R^2 = \frac{1}{4}HK^2 = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{36}{5}\right)^2 + \left(\frac{48}{5}\right)^2\right) = \frac{3600}{4.25} = 36$$

Do đó phương trình đường tròn (C) : $\left(x - \dfrac{37}{5}\right)^2 + \left(y - \dfrac{31}{5}\right)^2 = 36$. ■

Bài 25. *Dự bị khối A 2002*

Viết phương trình tiếp tuyến chung của 2 đường tròn :

$(C_1) : x^2 + y^2 - 10x = 0$ và $(C_2) : x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$.

GIẢI

(C_1) tâm $I(5, 0)$; bán kính $R = 5$.

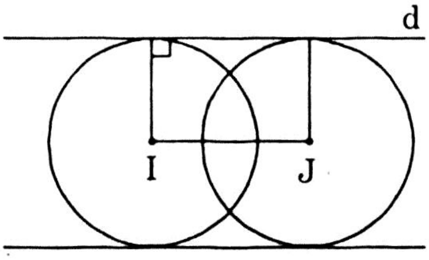
(C_2) tâm $J(-2, 1)$; bán kính $R' = 5$.

Ta có $|R - R'| < IJ = \sqrt{49 + 1} = 5\sqrt{2} < R + R'$

Vậy (C_1), (C_2) cắt nhau nên chỉ có 2 tiếp tuyến chung. Mà $R = R'$ nên 2 tiếp tuyến chung song song $\overrightarrow{IJ} = (-7, 1)$.

Do đó tiếp tuyến chung dạng : $1x + 7y + c = 0$.

Do điều kiện tiếp xúc :



$$\delta(I; d) = R \Leftrightarrow \frac{|5 + c|}{\sqrt{5c}} = 5$$

$$\Leftrightarrow |c + 5| = 25\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow c = -5 \pm 25\sqrt{2}$$

Vậy phương trình 2 tiếp tuyến chung : $x + 7y - 5 \pm 25\sqrt{2} = 0$. ■

Bài 26. $(C) : x^2 + y^2 = 1$

$(C_m) : x^2 + y^2 - 2(m + 1)x + 4my - 5 = 0$

a) Tìm quỹ tích tâm các đường tròn (C_m).

b) Chứng minh có 2 đường tròn của họ (C_m) tiếp xúc (C). Viết phương trình tiếp tuyến chung của 2 đường tròn đó.

GIẢI

a) (C_m) là đường tròn $\Leftrightarrow$ $(m + 1)^2 + 4m^2 + 5 > 0 \quad \forall m \in R$

$$\text{Tâm I} \begin{cases} x_I = m + 1 & (1) \\ y_I = -2m & (2) \end{cases}$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ quỹ tích của tâm I là đường thẳng : $2x + y - 2 = 0$.

b) Ta có : $d = OI = \sqrt{5m^2 + 2m + 1}$

$R_m = \sqrt{5m^2 + 2m + 6}$ và $R = 1$

(C_m) tiếp xúc (C)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = R + R_m \\ d = |R - R_m| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{5m^2 + 2m + 1} = 1 + \sqrt{5m^2 + 2m + 6} \\ \sqrt{5m^2 + 2m + 1} = \left|1 - \sqrt{5m^2 + 2m + 6}\right| \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{vô nghiệm} \\ 5m^2 + 2m + 1 = 1 - 2\sqrt{5m^2 + 2m + 6} + 5m^2 + 2m + 6 \end{array}\right.$$

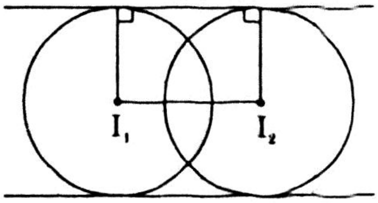
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{5m^2 + 2m + 6} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 5m^2 + 2m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m_1 = -1 \vee m_2 = -\frac{3}{5}$$

Do đó có 2 đường tròn của họ (C_m) tiếp xúc (C) đó là 2 đường tròn :

Tâm $I_1(0, 2)$; bán kính $R_1 = 3$

Tâm $I_2\left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right)$; bán kính $R_2 = 3$.



Ta có : $d = I_1I_2 = \frac{\sqrt{320}}{5} < R_1 + R_2 = 6$

Do (C_1) và (C_2) là 2 đường tròn cắt nhau và có bán kính cùng = 3 nên có 2 tiếp tuyến chung // nhau và nhận $\overrightarrow{I_1I_2} = \left(\frac{8}{5}, -\frac{16}{5}\right)$ hay $(1, -2)$ là vectơ chỉ phương.

Vậy 2 tiếp tuyến chung có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2, 1)$.

Phương trình tiếp tuyến chung có dạng : $2x + y + C = 0 \quad (\Delta)$

(Δ) tiếp xúc (C_1) $\Leftrightarrow$ $\delta(I_1, \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{|2 + C|}{\sqrt{5}} = R = 3 \quad \Leftrightarrow \quad C = -2 \pm 3\sqrt{5}$$

Do đó 2 tiếp tuyến chung là : $2x + y - 2 \pm 3\sqrt{5} = 0$. ■

Bài 27. Cho họ đường tròn $(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 5m^2 - 1 = 0$.

a) Chứng minh (C_m) luôn tiếp xúc 2 đường thẳng cố định.

b) Tìm m để (C_m) cắt $(C) : x^2 + y^2 = 1$ tại hai điểm phân biệt A, B. Chứng minh khi đó đường thẳng AB có phương không đổi.

GIẢI

a) $M(x, y) \notin (C_m) \Leftrightarrow 5m^2 - 2(x - 2y)m + x^2 + y^2 - 1 = 0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \quad (x - 2y)^2 - 5(x^2 + y^2 - 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x + y)^2 > 5$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x + y > \sqrt{5} \vee 2x + y < -\sqrt{5}$$

Xét 2 đường thẳng $d_{1,2} : 2x + y \pm \sqrt{5} = 0$

Đường tròn (C_m) có tâm $I(m, -2m)$; bán kính $R = 1$.

Ta có : $\delta(I,\ d_{1,2}) = \dfrac{\left|2m - 2m \pm \sqrt{5}\right|}{\sqrt{5}} = 1 = R$

Vậy (C_m) luôn tiếp xúc 2 đường thẳng cố định có phương trình :

$$2x + y \pm \sqrt{5} = 0.$$

b) Đường tròn (C) có tâm O(0, 0) ; bán kính r = 1.

(C_m) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B

$$\Leftrightarrow \quad O = R - r < OI = \sqrt{5m^2} < R + r = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad m \neq 0 \text{ và } 5m^2 < 4 \quad \Leftrightarrow \quad m \neq 0 \text{ và } |m| < \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Lúc đó đường thẳng (AB) chính là trục đẳng phương của (C_m) và (C).

Phương trình (AB) : $x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 5m^2 - 1 = x^2 + y^2 - 1$

$$\Leftrightarrow \quad -2mx + 4my + 5m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x - 4y - 5m = 0 \quad (\text{do } m \neq 0)$$

Đường thẳng AB có phương không đổi vì có vectơ chỉ phương (4, 2) không đổi. ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT30. Xét vị trí tương đối của các cặp đường tròn sau :

a) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$ và $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$

b) $x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0$ và $x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$ và $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$.

BT31. Cho 2 đường tròn $(C_1) : x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$

$(C_2) : x^2 + y^2 - 12x - 6y + 44 = 0$

a) Chứng minh (C_1) và (C_2) ở ngoài nhau.

b) Viết phương trình các tiếp tuyến chung của (C_1), (C_2).

BT32. Cho 2 đường tròn $(C_1) : (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$

$(C_2) : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

a) Chứng minh (C_1) luôn cắt (C_2) tại 2 điểm.

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1), (C_2).

BT33. Cho 2 đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - x - 6y + 8 = 0$

$(C') : x^2 + y^2 - 2mx - 1 = 0$

Tìm m để (C) tiếp xúc (C').

BT34. Cho 2 đường tròn (C) : $x^2 + y^2 + 6x = 0$

$$(C') : (1 + m^2)(x^2 + y^2) - 4x - 4my - 12 = 0$$

Chứng minh (C) luôn cắt (C') tại 2 điểm phân biệt và tiếp tuyến của (C) và (C') tại mỗi giao điểm này vuông góc nhau.

BT35. Chứng minh các họ đường tròn sau đây luôn tiếp xúc nhau tại một điểm cố định.

a) $x^2 + y^2 - 4mx - 2y + 4m = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2(2m - 1)x + 2(m - 1)y - 16m - 3 = 0$.

BT36. Cho 2 đường tròn $(C_1) : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

$$(C_2) : x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$$

a) Chứng minh rằng (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau.

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

BT37. *Dự bị 2005*

Cho (C) : $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 36 = 0$.

Viết phương trình đường tròn (C') tiếp xúc 2 trục tọa độ và tiếp xúc ngoài (C).

BT38. Cho 2 đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

$$(C') : x^2 + y^2 - 12x - 12y + 36 = 0$$

a) Chứng minh (C) và (C') ở ngoài nhau.

b) Tìm khoảng cách ngắn nhất và dài nhất nối một điểm của (C_1) và một điểm của (C_2).

BT39. Viết phương trình các tiếp tuyến chung của 2 đường tròn :

a) *Dự bị khối A 2002*

$(C_1) : x^2 + y^2 - 10x = 0$; $(C_2) : x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$.

b) *Dự bị khối B 2002*

$(C_1) : x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$; $(C_2) : x^2 + y^2 + 4y - 2y - 20 = 0$.

31 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

A. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN – PHƯƠNG TÍCH

1 Cho $(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 6m - 1 = 0$. (C_m) là đường tròn khi và chỉ khi :

a) $\frac{1}{5} < m < 1$

b) $\frac{1}{5} \le m \le 1$

c) $m < \frac{1}{5} \vee m > 1$

d) $m \le \frac{1}{5} \vee m \ge 1$.

- *Cho* $(C_m) : x^2 + y^2 + 2mx - 6y + 4 - m = 0$. *Hãy trả lời câu 2 và 3.*

2 (C_m) là đường tròn khi và chỉ khi :

a) $m \in \varnothing$ b) $m \in R$

c) $m \in (-1, 1)$ d) $m > 1$.

3 Tập hợp các tâm I là :

a) $(d) : x = -m$ b) $(d) : x = 3$

c) $(d) : y = 3$ d) $y = -3$.

4 Cho đường tròn $(C) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$. Kết luận nào sau đây là sai :

a) O(0, 0) nằm ngoài (C). b) A(3, 2) nằm trên (C).

c) B(1, 1) nằm trong (C). d) D(2, –1) nằm trong (C).

5 Trục đẳng phương của $(C) : x^2 + y^2 = 9$ và $(C') : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$ là đường thẳng có phương trình :

a) $x + y + 7 = 0$ b) $x + y - 7 = 0$

c) $2x + y - 14 = 0$ d) $x = 1$.

6 Cho họ $(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx + 2m = 0$ và A(2, 0). Kết luận nào sau đây là đúng :

a) (C_m) là đường tròn với mọi m. b) A luôn nằm ngoài (C_m).

c) O(0, 0) luôn nằm trong (C_m). d) (C_m) luôn cắt đoạn OA với mọi m.

7 Cho A(–1, 1); B(5, 3) thì đường tròn đường kính AB có phương trình :

a) $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 5 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 5 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 6 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 6 = 0$.

8 Phương trình đường tròn qua O(0, 0); M(1, 1); N(2, 0) là :

a) $x^2 + y^2 + 2x = 0$ b) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2y = 0$ d) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$.

9 Cho A(3, 0); B(0, 4). Phương trình đường tròn nội tiếp ΔOAB là :

a) $x^2 + y^2 = 1$ b) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$

c) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ d) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$.

10 Đường tròn qua A(–1, 2); B(–2, 3) và tâm $I \in \Delta : 3x - y + 10 = 0$ thì tâm I là :

a) I(0, 10) b) I(–3, –1) c) I(–3, 1) d) I(3, 1).

11 Cho A(–2, 0); B(0, 2); $C(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Phương trình đường tròn qua A, B, C là :

a) $x^2 + y^2 = 2$ b) $x^2 + y^2 = 4$

c) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ d) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$.

12 Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 = 1$. Từ M(2, 2) vẽ hai tiếp tuyến đến (C). Gọi hai tiếp điểm là A và B thì phương trình (AB) là :

a) $x + y - 1 = 0$ b) $x - y + 1 = 0$

c) $2x + 2y + 5 = 0$ d) $x + y + 2 = 0$.

B. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

13 Đường tròn tâm I(2, 3) tiếp xúc với trục tung có bán kính :

a) R = 2 b) R = 3 c) Hai kết quả a, b đều đúng.

d) Hai kết quả a, b đều sai.

14 Phương trình đường tròn tâm I(2, 3) mà tiếp xúc $\Delta : 4x + 3y - 12 = 0$ là

a) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ b) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$

c) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$ d) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$.

15 Phương trình đường tròn qua M(4, 2) và tiếp xúc 2 trục tọa độ là :

a) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ b) $(x - 10)^2 + (y - 10)^2 = 100$

c) Hai kết quả a, b đều đúng. d) Hai kết quả a, b đều sai

16 Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) : $x^2 + y^2 = 2$ tại A(−1, 1) là :

a) $x - y + 2 = 0$ b) $x + y - 2 = 0$

c) $x - y - 2 = 0$ d) $x + y + 2 = 0$.

17 Phương trình tiếp tuyến của (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ tại E(4, 2) là

a) $3x - 4y + 20 = 0$ b) $3x - 4y - 20 = 0$

c) $3x + 4y + 20 = 0$ d) $3x + 4y - 20 = 0$.

18 Số đường thẳng qua A(5, 6) và tiếp xúc (C) : $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ là :

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3.

19 Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$. Phương trình tiếp tuyến của (C) mà vuông góc với (d) : $3x - y + 4 = 0$ là :

a) $x + 3y - 10 = 0$ b) $x + 3y + 10 = 0$

c) Hai kết quả a, b đều đúng. d) Hai kết quả a, b đều sai

20 Tâm của đường tròn qua O(0, 0); A(−1, 1) và tiếp xúc (d) : $x - y + 1 + \sqrt{2} = 0$ là :

a) I(0, 1) b) I(−1, 0) c) Hai kết quả a, b đều đúng.

d) Hai kết quả a, b đều sai.

21 (d) : $mx - y + 3 - 2m = 0$ cắt (C) : $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{5}$ khi và chỉ khi :

a) $\frac{1}{2} \le m \le 7$ b) $\frac{1}{2} < m < 7$ c) $m > 7$ d) $m < \frac{1}{2}$.

22 Cho (C) : $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ và (d) : $\sqrt{2}x + my + 1 - \sqrt{2} = 0$ thì (d) tiếp xúc (C) khi và chỉ khi :

a) $m > 4$ b) $m < 4$ c) $m = 4$

d) Các kết quả a, b, c đều sai.

23 Cho (C) : $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ và (d) : $2x - y - 1 = 0$. Biết d cắt (C) tại A và B thì độ dài AB là :

a) $8\sqrt{5}$ b) $\frac{8}{5}\sqrt{5}$ c) 8 d) $\sqrt{5}$.

24 Cho (C) : $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$ và (Δ) : $x - y + 2 = 0$. Kết luận nào sau đây là đúng :

a) Δ tiếp xúc (C). b) Δ và (C) không có điểm chung.

c) Δ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt. d) Δ qua tâm I của (C).

25 Tiếp tuyến của (C) : $x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$ mà song song với (d) : $x + 3y = 0$ là :

a) $x + 3y + 10 = 0$ b) $x + 3y - 10 = 0$

c) Hai kết quả a, b đều đúng. d) Hai kết quả a, b đều sai.

26 Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Hệ số góc tiếp tuyến của (C) đi qua A(3, −2) là :

a) $k = 2$ b) $k = -\frac{1}{2}$ c) Hai kết quả a, b đều đúng.

d) Hai kết quả a, b đều sai.

C. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI 2 ĐƯỜNG TRÒN

27 Cho hai đường tròn (C_1) : $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ và

(C_2) : $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$.

Kết luận nào sau đây là đúng.

a) (C_1) cắt (C_2) b) (C_1), (C_2) tiếp xúc trong

c) (C_1), (C_2) tiếp xúc ngoài d) (C_1) và (C_2) ở ngoài nhau.

28 Cho hai đường tròn (C) : $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$ và (C') : $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 3$. Kết luận nào sau đây là đúng :

a) (C), (C') cắt nhau. b) (C), (C') tiếp xúc trong.

c) (C), (C') tiếp xúc ngoài. d) (C) đựng (C').

29 Cho (C) : $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ và (C') : $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 36$. Số đường tiếp tuyến chung của (C) và (C') là :

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4.

30 Cho (C) : $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$; (C') : $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$

Kết luận nào sau đây là đúng :

a) (C), (C') cắt nhau.

b) Phương trình đường thẳng qua dây chung là : $2x + 4y + 7 = 0$.

c) Hai kết luận a, b đều đúng. d) Hai kết luận a, b đều sai.

31 Cho (C) : $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$; (C') : $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$

Kết luận nào sau đây là sai :

a) (C), (C') tiếp xúc trong.

b) (C), (C') có 1 tiếp tuyến chung duy nhất.

c) Phương trình các tiếp tuyến chung là : $3x - 4y - 26 = 0$.

d) (C') và (C) đựng nhau.

TRẢ LỜI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m^2 - (6m - 1 > 0$

$\Leftrightarrow 5m^2 - 6m + 1 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{5} \vee m > 1$. Chọn c

2 $\begin{cases} a = -m \\ b = 3 \\ c = 4 - m \end{cases}$

(C_m) là đường tròn $\Leftrightarrow m^2 + 9 - (4 - m) > 0$

$\Leftrightarrow m^2 + m + 5 > 0\ \forall m$. Chọn b.

3 Ta có tâm I(−m, 3). Vậy tập hợp I là (d) : y = 3. Chọn c.

4 (C) : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

$\mathscr{P}_{O/(C)} = 1 > 0 \Rightarrow$ O nằm ngoài (C)

$\mathscr{P}_{A/(C)} = 9 + 4 - 6 - 8 + 1 = 0 \Rightarrow A \in (C)$

$\mathscr{P}_{B/(C)} = 1 + 1 - 2 - 4 + 1 < 0 \Rightarrow$ B trong (C)

$\mathscr{P}_{D/(C)} = 4 + 1 - 4 + 4 + 1 > 0 \Rightarrow$ D nằm ngoài (C). Chọn d sai.

$\boxed{5}$ Phương trình trục đẳng phương (C) và (C') :

$x^2 + y^2 - 9 = x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 \Leftrightarrow 2x + 2y + 14 = 0$. Chọn a.

$\boxed{6}$ (C_m) là đường tròn $\Leftrightarrow m^2 - 2m > 0$ nên a sai.

$\mathscr{P}_{A/(C_m)} = 4 - 2m$ nên b sai.

$\mathscr{P}_{O/(C_m)} = 2m$ nên c sai.

$\mathscr{P}_{A/(C_m)} \cdot \mathscr{P}_{O/(C_m)} = 2m(4 - 2m) = -4(m^2 - 2m) < 0$

Do (C_m) là đường tròn $\Leftrightarrow m^2 - 2m > 0$. Vậy chọn d.

$\boxed{7}$ $A(-1, 1)$; $B(5, 3)$. Vậy trung điểm $I(2, 2)$.

$R = IA = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

Phương trình (C) : $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y - 6 = 0$. Chọn c.

$\boxed{8}$ Phương trình (C) dạng : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

$O(0, 0) \in (C) \Rightarrow c = 0$

$N(2, 0) \in (C) \Rightarrow 4 - 4a = 0 \Rightarrow a = 1$

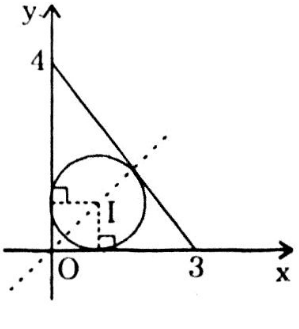
$M(1, 1) \in (C) \Rightarrow 2 - 2a - 2b = 0 \Rightarrow b = 0$

Phương trình (C) : $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Chọn b.

$\boxed{9}$ Ta có tâm $I(a, a)$ và $r = |a|$ với $a > 0$ (Do $I \in (d) : y = x$)

Mà dt $(\Delta ABO) = pr$

$$\Rightarrow r = \frac{\frac{1}{2}OA.OB}{\frac{1}{2}(OA + OB + AB)} = \frac{3 \times 4}{3 + 4 + 5} = 1$$



Vậy phương trình (C) : $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. Chọn c.

$\boxed{10}$ Gọi $I(a, b)$.

Do $IA = IB \Rightarrow (a + 1)^2 + (b - 2)^2 = (a + 2)^2 + (b - 3)^2$

$\Rightarrow 2a - 4b + 5 = 4a - 6b + 13$

$\Rightarrow a - b = -4$ (1)

Mà $I \in \Delta \Rightarrow 3a - b = -10$ (2)

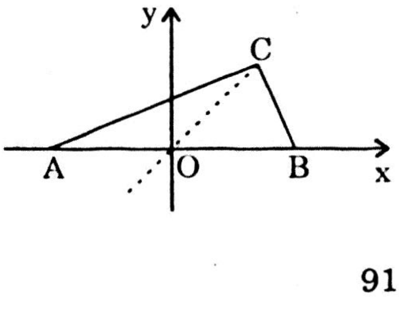
(1), (2) $\Rightarrow I(-3, 1)$. Chọn c.

$\boxed{11}$ Nhận xét : O là trung điểm AB

$C(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \in$ đường phân giác $y = x$.

Vậy O là tâm đường tròn (C).

$R = OC = \sqrt{4}$. Vậy chọn kết quả b.



$\boxed{12}$ Đường tròn (C') đường kính OM là : $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$$

(AB) là trục đẳng phương (C) và (C')

$$x^2 + y^2 - 1 = x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6$$

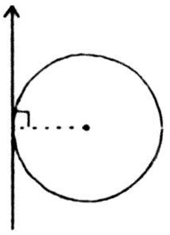
$\Leftrightarrow \quad 2x + 2y + 5 = 0$. Chọn c.

$\boxed{13}$ (I, R) tiếp xúc y'Oy (x = 0)

$\Leftrightarrow \quad \delta(I, y'Oy) = R$

$\Leftrightarrow \quad |x_I| = R$

$\Leftrightarrow \quad R = 2$. Chọn a.



$\boxed{14}$ Do điều kiện tiếp xúc : $R = \delta(I, \Delta) = \dfrac{|8 + 9 - 12|}{\sqrt{25}} = 1$

Vậy chọn c, vì $R = \sqrt{4 + 9 - 12} = 1$.

$\boxed{15}$ (C) tiếp xúc trục tung và hoành ⇒ $I \in (d) : y = \pm x$

Mà (C) qua $M(4, 2) \in$ phần tư thứ I ⇒ $I(a, a)$

Phương trình (C) : $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$

$M \in (C) \quad \Rightarrow \quad (4 - a)^2 + (2 - a)^2 = a^2$

$\Rightarrow \quad a^2 - 12a + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \vee a = 10$. Chọn c.

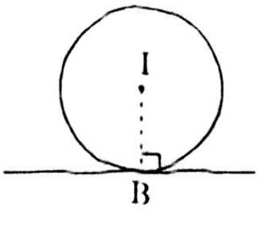
$\boxed{16}$ Dĩ nhiên $A \in (C)$.

Phương trình tiếp tuyến tại A là :

$xx_A + yy_A = 2 \quad \Leftrightarrow \quad -x + y = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x - y + 2 = 0$. Chọn a.

$\boxed{17}$ Hiển nhiên $B \in (C)$ vì $16 + 4 - 8 + 8 - 20 = 0$.

Có thể dùng công thức phân đôi như câu 16 hoặc (C) có tâm I(1, −2).



Tiếp tuyến qua B và có PVT $\overrightarrow{IB} = (3, 4)$.

Phương trình tiếp tuyến : $3(x - 4) + 4(y - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 3x + 4y - 20 = 0.$$ Chọn d.

$\boxed{18}$ Phương trình (C) : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$.

Ta có $\mathscr{P}_{A/(C)} = 25 + 36 - 10 - 24 + 4 > 0$

⇒ A nằm ngoài (C) ⇒ Có 2 tiếp tuyến qua A. Chọn c.

$\boxed{19}$ (C) có tâm I(3, −1); $R = \sqrt{10}$

Tiếp tuyến ⊥ d nên có dạng : $x + 3y + c = 0$

Do điều kiện tiếp xúc $\Rightarrow \quad \delta(I, TT) = R \quad \Rightarrow \quad \dfrac{|3 - 3 + c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

$\Rightarrow \quad c = \pm 10$. Chọn c.

20 Gọi I(a, b) ta có : $\begin{cases} IA^2 = IO^2 \\ \delta(I, d) = IO \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2 + (b-1)^2 = a^2 + b^2 & (1) \\ \dfrac{|a - b + 1 + \sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = \sqrt{a^2 + b^2} & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow \quad a - b + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = a + 1$

Thay vào (2) $\Rightarrow \quad |a - (a+1) + 1 + \sqrt{2}\,| = \sqrt{2}\sqrt{a^2 + (a+1)^2}$

$\Rightarrow \quad \sqrt{2} = \sqrt{2}\sqrt{2a^2 + 2a + 1} \quad \Rightarrow \quad 2a^2 + 2a = 0$

$\Rightarrow \quad a = 0 \vee a = -1$

Vậy I(0, 1) ∨ I(−1, 0). Chọn c.

21 (d) cắt (C) $\Leftrightarrow \quad \delta(I, d) < R \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{|m + 3 - 2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} < \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow \quad 5(3 - m)^2 < m^2 + 1$

$\Leftrightarrow \quad 4m^2 - 30m + 14 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{2} < m < 7.$ Chọn b.

22 (C) có tâm I(1, −2); R = 3.

(d) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \quad \delta(I, d) = R \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{|\sqrt{2} - 2m + 1 - \sqrt{2}|}{\sqrt{2 + m^2}} = 3$

$\Leftrightarrow \quad (1 - 2m)^2 = 9(m^2 + 2)$

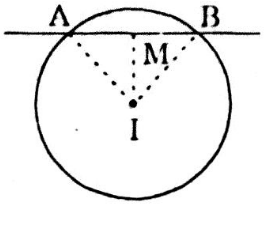
$\Leftrightarrow \quad 5m^2 + 4m + 17 = 0$ vô nghiệm. Chọn d.

23 (C) có tâm I(2, 1); R = 2.

Ta có $IM = \delta(I, d) = \dfrac{|4 - 1 - 1|}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\Delta IHB \quad \Rightarrow \quad HA^2 = R^2 - IH^2 = 4 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{16}{5}$

$\Rightarrow \quad AB = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$. Chọn b.



24 (C) có tâm I(−3, −2); R = 2.

$\delta(I, \Delta) = \dfrac{|-3 + 2 + 2|}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < R$

$\Rightarrow \Delta$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt. Chọn c.

25 Phương trình d' // d : $x + 3y + c = 0$

(C) có tâm $I(-3, 1)$; $R = \sqrt{10}$

Do điều kiện tiếp xúc $\Rightarrow$ $\delta(I, d') = R$ $\Rightarrow$ $\dfrac{|-3+3+c}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

$\Rightarrow$ $c = \pm 10$. Chọn c.

26 (C) có tâm $I(2, 1)$; $R = \sqrt{5}$.

Phương trình (d) qua A và có hệ số góc k :

$$y = k(x - 3) - 2 \Leftrightarrow kx - y - 2 - 3k = 0$$

(d) tiếp xúc (C') $\Leftrightarrow$ $\delta(I, d) = R$

$\Leftrightarrow$ $2k^2 - 3k - 2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $k = 2 \vee k = -\frac{1}{2}$. Chọn c.

27 (C_1) có tâm $I(-1, 3)$; $R = \sqrt{1 + 9 - 6} = 2$

(C_2) có tâm $J(2, -1)$; $R' = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$

Ta có : $IJ = \sqrt{9 + 16} = 5 = R + R'$ $\Rightarrow$ (C_1), (C_2) tiếp xúc ngoài. Chọn c.

28 (C) có tâm $I(-1, 3)$; $R = 2$.

(C') có tâm $J(2, -1)$; $R' = 3$.

Ta có : $IJ = \sqrt{9 + 16} = R + R'$ $\Rightarrow$ (C), (C') tiếp xúc ngoài. Chọn c.

29 (C) có tâm $I(1, 1)$; $R = 1$.

(C') có tâm $J(6, 6)$; $R' = 6$.

Ta có $IJ = 5\sqrt{2} > R + R'$ $\Rightarrow$ (C), (C') ở ngoài nhau

$\Rightarrow$ Có 4 tiếp tuyến chung. Chọn d.

30 (C) có tâm $I(1, 3)$; $R = 5$.

(C') có tâm $J(0, 1)$; $R' = 3$.

Ta có $R - R' < IJ = \sqrt{5} < R + R'$ $\Rightarrow$ (C), (C') cắt nhau

→ a đúng.

Đường thẳng qua dây chung chính là trục đẳng phương → b đúng. Chọn c.

31 (C) có tâm $I(1, -2)$; $R = 3$.

(C') có tâm $J(-2, 2)$; $R' = 8$.

$IJ = 5 = R - R'$ $\Rightarrow$ (C), (C') tiếp xúc trong.

Kết luận d sai.

Bài 5

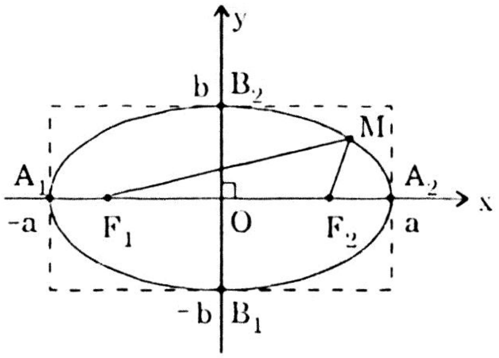
ELIP

1. Định nghĩa :

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c$ và hằng số $2a$ $(a > c > 0)$

$$\boxed{M \in \text{elip } (E) \Leftrightarrow F_1M + F_2M = 2a}$$

- F_1, F_2 : 2 tiêu điểm
- $F_1F_2 = 2c$: tiêu cự.



$a > b$

2. Phương trình chính tắc, các yếu tố và tính chất :

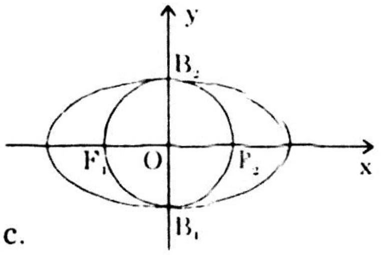
Phương trình chính tắc (E)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ (Trục lớn trên Ox)
Độ dài trục lớn	$2a$
Độ dài trục nhỏ	$2b$
Tiêu điểm	$F_1(-c, 0)$; $F_2(c, 0)$ với $c^2 = a^2 - b^2$
Tâm sai	$e = \frac{c}{a}$ $(e < 1)$
Đường chuẩn	$\Delta_1 : x = \frac{-a}{e}, \Delta_2 : x = \frac{a}{e}$
Bán kính qua tiêu điểm của $M(x_M, y_M) \in (E)$	$r_1 = MF_1 = a + ex_M$ $r_2 = MF_2 = a - ex_M$
PT tiếp tuyến với (E) tại điểm $M(x_o, y_o) \in (E)$	$\frac{x_ox}{a^2} + \frac{y_oy}{b^2} = 1$
Điều kiện tiếp xúc của (E) và đường thẳng $\Delta : Ax + By + C = 0$	$A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$

BÀI TẬP

Bài 1. *Dự bị khối D 2006*

Viết phương trình Elip có độ dài trục lớn $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và tiêu điểm cùng nằm trên một đường tròn.

GIẢI



Phương trình (E) có dạng : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Ta có : $2a = 4\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad a = 2\sqrt{2}$

Do F_1, F_2, B_1, B_2 cùng nằm trên 1 đường nên $b = c$.

Mà $c^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = \dfrac{a^2}{2} = 4$

Vậy phương trình (E) là : $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. ■

Bài 2. Cho $A(3\cos t, 0)$; $B(0, 2\sin t)$.

Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

GIẢI

Gọi M(x, y). Ta có : $\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3\cos t + 5(0 - x) = 0 \\ y - 0 + 5(2\sin t - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{4}\cos t \\ y = \dfrac{5}{2}\sin t \end{cases}$$

Mà : $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ nên $\left(-\dfrac{4x}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2y}{5}\right)^2 = 1$

Do đó tập hợp điểm M là (E) có phương trình : $\dfrac{x^2}{\frac{9}{16}} + \dfrac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1$. ■

Bài 3. *Tuyển sinh khối D 2005*

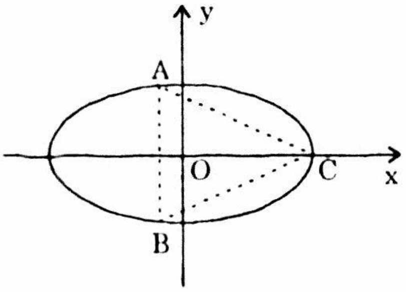
Tìm A, B ∈ (E) : $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ sao cho A, B và C(2, 0) tạo thành một tam giác đều.

GIẢI

Gọi $A\left(a, \dfrac{\sqrt{4 - a^2}}{2}\right) \in (E)$ và $B\left(a, -\dfrac{\sqrt{4 - a^2}}{2}\right) \in (E)$ với $-2 < a < 2$.

với A và B đối xứng nhau qua x'Ox.

Ta có : ΔCAB đều $\Leftrightarrow$ $CA^2 = AB^2$ $\Leftrightarrow$ $(a-2)^2 + \dfrac{4-a^2}{4} = 4 - a^2$



$$\Leftrightarrow \quad 7a^2 - 16a + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a = 2 \text{ (loại do } A \equiv C) \\ a = \dfrac{2}{7} \end{array}\right.$$

Vậy $A\left(\dfrac{2}{7}, \dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$; $B\left(\dfrac{2}{7}, \dfrac{-4\sqrt{3}}{7}\right)$. ■

Bài 4. Cho (E) có phương trình : $x^2 + 4y^2 = 4$

1. Tìm tọa độ các đỉnh, tiêu điểm và tâm sai của (E).
2. Đường thẳng qua 1 tiêu điểm của (E) và song song trục Oy cắt (E) tại 2 điểm M và N. Tính độ dài MN.
3. Tìm k để đường thẳng $y = x + k$ cắt (E) đã cho.

GIẢI

1. $x^2 + 4y^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$

Ta có : $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ và $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$.

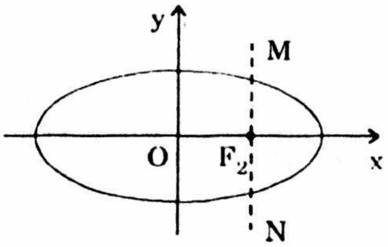
Do $a > b$ nên $c^2 = a^2 - b^2 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$

Đỉnh của (E) là : $A_1(-2, 0)$; $A_2(2, 0)$;

$B_1(0, -1)$; $B_2(0, 1)$.

Tiêu điểm : $F_1\left(-\sqrt{3}, 0\right)$; $F_2\left(\sqrt{3}, 0\right)$

Tâm sai : $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



2. Ta có : $MN = 2MF_2$ (do Ox là trục đối xứng của (E))

$$\Leftrightarrow \quad MN = 2(a - ex_M) = 2\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}\right) = 1.$$

3. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) : $y = x + k$ và (E) là :

$$x^2 + 4(x+k)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 5x^2 + 8kx + 4k^2 - 4 = 0$$

(d) cắt (E) $\Leftrightarrow$ $\Delta' = 16k^2 - 5(4k^2 - 4) > 0$

$\Leftrightarrow$ $-4k^2 + 20 > 0$

$\Leftrightarrow$ $k^2 < 5$ $\Leftrightarrow$ $-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$. ■

Bài 5. Cho (E) : $4x^2 + 9y^2 = 36$ và $M(1, 1)$. Lập phương trình đường thẳng qua M và cắt (E) tại M_1, M_2 sao cho $MM_1 = MM_2$.

GIẢI

Gọi (d) là đường thẳng qua M và có VTCP $\vec{v} = (\alpha, \beta)$.

Phương trình tham số (d) là : $\begin{cases} x = 1 + \alpha t \\ y = 1 + \beta t \end{cases}$ $(t \in R)$

Thay x, y của phương trình (d) vào phương trình (E) ta được :

$$4(1 + \alpha t)^2 + 9(1 + \beta t)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow \quad (4\alpha^2 + 9\beta^2)t^2 + (8\alpha + 18\beta)t - 23 = 0 \qquad (*)$$

Do ac < 0 nên (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2

Lúc đó : $M_1 \begin{cases} x = 1 + \alpha t_1 \\ y = 1 + \beta t_1 \end{cases}$ và $M_2 \begin{cases} x = 1 + \alpha t_2 \\ y = 1 + \beta t_2 \end{cases}$

Do M(1, 1) là trung điểm M_1M_2 ta có :

$$\begin{cases} 2 + \alpha(t_1 + t_2) = 2x_M = 2 \\ 2 + \beta(t_1 + t_2) = 2y_M = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(t_1 + t_2) = 0 \\ \beta(t_1 + t_2) = 0 \end{cases}$$

Vậy $t_1 + t_2 = 0$.

Mà $t_1 + t_2 = S = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{-(8\alpha + 18\beta)}{4\alpha^2 + 9\beta^2}$ nên $8\alpha + 18\beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\dfrac{9\beta}{4}$

Chọn $\beta = 4$ thì $\alpha = -9$

Do đó phương trình tham số đường thẳng cần tìm là :

$$\begin{cases} x = 1 - 9t \\ y = 1 + 4t \end{cases} \quad t \in R \quad ■$$

Bài 6. *Dự bị khối D 2002*

Cho (d) : $mx - y - 1 = 0$ và (E) : $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

a) Chứng minh (d) luôn cắt (E) tại 2 điểm phân biệt.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (E) đi qua N(1, -3).

GIẢI

a) Tọa độ giao điểm (d) và (E) là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} y = mx - 1 & (1) \\ 4x^2 + 9y^2 = 36 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \quad 4x^2 + 9(mx - 1)^2 = 36$

$\Rightarrow \quad (4 + 9m^2)x^2 - 18mx - 27 = 0 \qquad (*)$

Do $ac = -27(4 + 9m^2) < 0$ $\forall m$ nên (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy (d) luôn cắt (E) tại 2 điểm.

b) Phương trình (D) qua N(1, −3) và có PVT (m, n)

$$m(x-1)+n(y+3)=0 \Leftrightarrow mx+ny-m+3n=0$$

(D) tiếp xúc (E) $\Leftrightarrow a^2A^2+b^2B^2=C^2$

$\Leftrightarrow 9m^2+4n^2=(3n-m)^2$

$\Leftrightarrow 8m^2+6nm-5n^2=0$

Ta có : $\Delta'_m=(3n)^2-8(-5n^2)=(7n)^2$

Vậy $m=\dfrac{-3n\pm 7n}{8}=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{n}{2}\\ -\dfrac{5n}{4}\end{array}\right.$

Với $m=\dfrac{n}{2}$. Chọn n = 2 và m = 1, phương trình tiếp tuyến (D_1) là :

$$x+2y+5=0$$

Với $m=-\dfrac{5n}{4}$. Chọn n = −4 và m = 5, phương trình tiếp tuyến (D_2) là :

$$5x-4y-17=0. \blacksquare$$

Bài 7. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ các tiêu điểm của elip đến một tiếp tuyến bất kỳ của (E) bằng bình phương độ dài trục nhỏ.

GIẢI

Xét (E) : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ với a > b và (D) : $Ax+By+C=0$

Vậy tiêu điểm $F_1(-c, 0)$; $F_2(c, 0)$ với $c^2=a^2-b^2$.

(D) tiếp xúc (E) $\Leftrightarrow a^2A^2+b^2B^2=C^2$

Ta có : $\delta(F_1, D).\delta(F_2, D)=\dfrac{|-Ac+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.\dfrac{|Ac+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$$=\frac{|C^2-A^2c^2|}{A^2+B^2}=\frac{|a^2A^2+b^2B^2-A^2(a^2-b^2)|}{A^2+B^2}$$

$$=\frac{b^2B^2+A^2b^2}{A^2+B^2}=b^2 \blacksquare$$

Bài 8. Cho (E) $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$. Viết phương trình các đường thẳng chứa cạnh hình vuông ngoại tiếp (E) đó.

GIẢI

Gọi (d_1), (d_2) là 2 cạnh đối diện của hình vuông :

Phương trình (d_1) dạng $Ax + By + C = 0$

Phương trình (d_2) dạng $Ax + By + C' = 0$ (do $d_1 // d_2$)

Gọi (d_3), (d_4) là 2 cạnh còn lại của hình vuông :

Phương trình (d_3) dạng $Bx - Ay + D = 0$ (do $d_1 \perp d_3$)

Phương trình (d_4) dạng $Bx - Ay + D' = 0$ (do $d_4 // d_3$)

Do (d_1), (d_2), (d_3), (d_4) tiếp xúc (E) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6A^2 + 3B^2 = C^2 & (1) \\ 6A^2 + 3B^2 = C'^2 & (2) \\ 6B^2 + 3A^2 = D^2 & (3) \\ 6B^2 + 3B^2 = D'^2 & (4) \end{cases}$$

(1), (2) $\Rightarrow$ $C^2 = C'^2$ và (3), (4) $\Rightarrow$ $D^2 = D'^2$

Mặt khác do gốc tọa độ O là tâm đối xứng của hình nên

$$\delta(0, d_1) = \delta(0, d_3) \Leftrightarrow \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{B^2 + A^2}} \Leftrightarrow C^2 = D^2 \quad (5)$$

Từ (1), (3), (5) $\Rightarrow$ $6A^2 + 3B^2 = 6B^2 + 3A^2$ $\Rightarrow$ $A^2 = B^2$ $\Rightarrow$ $A = \pm B$

Chọn $A = 1$ và $B = \pm 1$ ta được : $C^2 = D^2 = 9$ $\Rightarrow$ $C = D = \pm 3$

Do đó phương trình 4 cạnh hình vuông là : $(d_1^2): x + y \pm 3 = 0$

$(d_3^4): x - y \pm 3 = 0$ ■

Bài 9. Cho (P) : $y = x^2 - 2x$ và (E) : $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

1. Chứng minh (P) cắt (E) tại 4 điểm phân biệt A, B, C, D.
2. Chứng minh 4 điểm A, B, C, D cùng nằm trên 1 đường tròn. Xác định tâm và bán kính.

GIẢI

1. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (E) :

$$\frac{x^2}{9} + (x^2 - 2x)^2 = 1 \Leftrightarrow 9x^4 - 36x^3 + 37x^2 - 9 = 0 \quad (*)$$

Xét hàm số $g(x) = 9x^4 - 36x^3 + 37x^2 - 9$ liên tục trên R.

Ta có : $f(-1) = 73$, $f(0) = -9$, $f(1) = 1$, $f(2) = -5$, $f(3) = 81$

Vì $f(-1).f(0) < 0$ nên (*) có nghiệm $x_A \in (-1, 0)$

$f(0) . f(1) < 0$ nên (*) có nghiệm $x_B \in (0, 1)$

$f(1) . f(2) < 0$ nên (*) có nghiệm $x_C \in (1, 2)$

$f(2) . f(3) < 0$ nên (*) có nghiệm $x_D \in (2, 3)$

Vậy (P) cắt (E) tại 4 điểm phân biệt A, B, C, D.

2. Tọa độ giao điểm của (P) và (E) là nghiệm hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + 9y^2 = 9 \\ x^2 - y - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 9y^2 = 9 & (1) \\ 8x^2 - 8y - 16x = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có : $9x^2 + 9y^2 - 16x - 8y - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - \frac{16}{9}x - \frac{8}{9}y - 1 = 0$$

Vậy A, B, C, D cùng nằm trên đường tròn tâm $I\left(\frac{8}{9}, \frac{4}{9}\right)$; bán kính

$R = \sqrt{\frac{64}{81} + \frac{16}{81} + 1} = \frac{\sqrt{161}}{9}$. ■

Bài 10. *Tuyển sinh Đại học khối D 2002.*

Cho (E) : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Gọi M, N lần lượt di động trên hai tia Ox, Oy sao cho MN tiếp xúc (E). Tìm tọa độ M, N sao cho độ dài MN ngắn nhất.

GIẢI

Gọi $M(m, 0) \in Ox$ và $N(0, n) \in Oy$ $\quad (m > 0 \wedge n > 0)$

Phương trình (MN) là : $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$

(MN) tiếp xúc với (E) $\Leftrightarrow \quad \frac{16}{m^2} + \frac{9}{n^2} = 1$

Ta có $MN = \sqrt{m^2 + n^2}$

Do bất đẳng thức Bunhiacopxki : $|Ax + By| \le \sqrt{A^2 + B^2}.\sqrt{x^2 + y^2}$

Ta có $\left|m\left(\frac{4}{m}\right) + n\left(\frac{3}{n}\right)\right| \le \sqrt{m^2 + n^2}.\sqrt{\frac{16}{m^2} + \frac{9}{n^2}} \quad \Leftrightarrow \quad 7 \le MN$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{m^2} = \frac{3}{n^2} \\ \frac{16}{m^2} + \frac{9}{n^2} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 = 4n^2 \\ 16n^2 + 9m^2 = m^2n^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 28 \\ n^2 = 21 \end{cases}$$

Do đó $MN_{min} \quad \Leftrightarrow \quad M(2\sqrt{7}, 0)$ và $N(0, \sqrt{21})$. ■

Bài 11*. **a)** Viết phương trình của Elip có tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{10}, 0\right); F_2\left(\sqrt{10}\ 0\right)$; độ dài trục lớn $2\sqrt{18}$.

b) Đường thẳng (d) tiếp xúc (E) tại M cắt 2 trục tọa độ tại A và B. Tìm M sao cho diện tích ΔOAB nhỏ nhất.

GIẢI

a) Vì $F_1, F_2 \in x'Ox \Rightarrow a > b$ Ta có : $c = \sqrt{10}, a = \sqrt{18}$

Vậy : $b^2 = a^2 - c^2 = 18 - 10 = 8$

Phương trình (E) là : $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

b) Phương trình (d) tiếp xúc (E) tại M $(x_0, y_0) \in$ (E) là :

$$\frac{xx_0}{18} + \frac{yy_0}{8} = 1 \Leftrightarrow 4x_0x + 9y_0y - 72 = 0$$

Giao điểm của (d) và Ox : $A\left(\dfrac{18}{x_0}, 0\right)$ với $x_0 \neq 0$

Giao điểm của (d) và Oy : $B\left(0, \dfrac{8}{y_0}\right)$ với $y_0 \neq 0$

$$\text{Diện tích } \Delta OAB = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\dfrac{18}{x_0} & 0\\ 0 & \dfrac{8}{y_0}\end{matrix}\right\| = \frac{72}{|x_0y_0|}$$

Mà M ∈ (E) nên $1 = \dfrac{x_0^2}{18} + \dfrac{y_0^2}{8}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số $\dfrac{|x_0|}{3\sqrt{2}}, \dfrac{|y_0|}{2\sqrt{2}}$,

ta có : $1 = \dfrac{x_0^2}{18} + \dfrac{y_0^2}{8} \geq 2.\dfrac{|x_0|}{3\sqrt{2}} . \dfrac{|y_0|}{2\sqrt{2}} = \dfrac{|x_0y_0|}{6}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|x_0y_0|} \geq \frac{1}{6} \Leftrightarrow S = \frac{72}{|x_0y_0|} \geq 12$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{|x_0|}{3\sqrt{2}} = \dfrac{|y_0|}{2\sqrt{2}}\\ 8x_0^2 + 18y_0^2 = 144\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x_0^2 = 9y_0^2\\ 36y_0^2 = 144\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0^2 = 9\\ y_0^2 = 4\end{cases}$

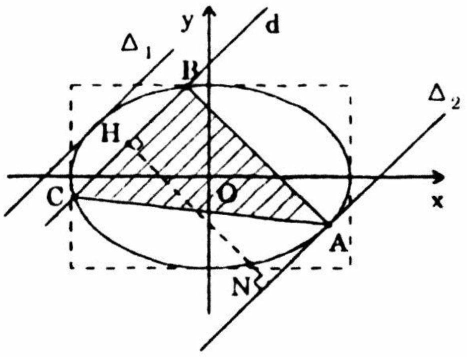
Vậy có 4 điểm M sao cho diện tích ΔOAB nhỏ nhất đó là :

$M_1(3, 2); M_2(-3, 2); M_3(3, -2); M_4(-3, -2)$. ■

Bài 12*. Cho (E) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ và (d) : $x-\sqrt{2}y+2=0$

(d) cắt (E) tại B, C. Tìm A ∈ (E) sao cho diện tích ΔABC lớn nhất.

GIẢI



- ***Cách 1 :***

Phương trình đường thẳng // d có dạng :

$x-\sqrt{2}y+C=0\ (\Delta)$

(Δ) tiếp xúc (E) ⇔ $8+4\left(-\sqrt{2}\right)^2=C^2$

⇔ $C=\pm4$

Vậy $(\Delta_1):\ x-\sqrt{2}y+4=0$ và $(\Delta_2):\ x-\sqrt{2}y-4=0$

Lấy M(−2, 0) ∈ (d) thì : $\delta(d,\Delta_1)=\delta(M,\Delta_1)=\frac{2}{\sqrt{3}}$

và $d(d,\Delta_2)=\delta(M,\Delta_2)=\frac{6}{\sqrt{3}}$

Lấy N bất kỳ ∈ (E) ta có :

$$NH=\delta(N,d)=\delta(d,\Delta_2)-\delta(N,\Delta_2)\le\delta(\Delta_2,d)=\frac{6}{\sqrt{3}}$$

Dấu = xảy ra ⇔ N ≡ A (A là tiếp điểm của Δ_2 và E)

Ta có : $S_{\Delta NBC}=\frac{1}{2}NH.BC$ mà BC hằng số

Vậy S max ⇔ NH max ⇔ N ≡ A

Tọa độ A là nghiệm hệ phương trình :

$$\begin{cases}x^2+2y^2=8\\x=\sqrt{2}y+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\sqrt{2}y+4)^2+2y^2=8\\x=\sqrt{2}y+4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4y^2+8\sqrt{2}y+8=0\\x=\sqrt{2}y+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\sqrt{2}\\x=2\end{cases}$$

Vậy khi $A\left(2,-\sqrt{2}\right)\in(E)$ thì $S_{\Delta ABC}$ lớn nhất.

- ***Cách 2 :*** Lấy $N(x_o, y_o)\in(E)$ thì $x_o^2+2y_o^2=8$

Ta có : $S=S_{(\Delta ABC)}=\frac{1}{2}NH.BC$ (mà BC hằng số)

nên S max ⇔ NH max

Ta có : $NH = \delta(N, d) = \dfrac{\left|x_o - \sqrt{2}y_o + 2\right|}{\sqrt{3}}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 3 cặp số ta có :

$$|x_o - \sqrt{2}y_o + 2| \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}.\sqrt{x_o^2 + (-\sqrt{2}y_o)^2 + 2^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\,NH \leq \sqrt{3}.\sqrt{x_o^2 + 2y_o^2 + 4} = \sqrt{3}.\sqrt{12}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_o}{1} = \dfrac{-\sqrt{2}y_o}{1} = \dfrac{2}{1} \\ x_o^2 + 2y_o^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x_o = 2,\ y_o = -\sqrt{2}$

Do đó S max $\Leftrightarrow$ $N(2, -\sqrt{2})$. ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. Cho $A(5, 0)$; $B\left(4, 3\sqrt{2}\right)$.

a) Lập phương trình đường tròn nhận AB làm đường kính. Tìm tọa độ giao điểm của đường tròn và trục hoành.

b) Lập phương trình chính tắc của Elip qua A và B.

BT2. Cho Elip (E) : $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

a) Tìm mối quan hệ giữa k và m để (d) : $y = kx + m$ tiếp xúc (E).

b) Khi (d) là tiếp tuyến của (E) gọi giao điểm của (d) với các đường thẳng $x = 5$ và $x = -5$ là M và N.

Tính diện tích ΔMFN theo k trong đó F là tiêu điểm của (E) có hoành độ dương.

c) Tìm k để $S_{(\Delta FMN)}$ nhỏ nhất.

BT3. Cho (E) : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

a) Tìm a, b sao cho (E) tiếp xúc với 2 đường thẳng

$d_1 : 3x - 2y - 20 = 0$, $\quad d_2 : x + 6y - 20 = 0$

b) Tìm hệ thức của a, b, m, n để (D) : $y = mx + n$ tiếp xúc với (E).

BT4. Cho Elip (E) : $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và 2 điểm $M(-2, m)$; $N(2, n)$.

a) Gọi $A_1(-2, 0)$; $A_2(2, 0)$. Hãy viết phương trình các đường thẳng A_1N và A_2M. Xác định tọa độ giao điểm của chúng.

b) Tìm điều kiện về m, n để đường thẳng MN tiếp xúc (E).

BT5. Cho (E) : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{5} = 1$ và A (–5, –1); B (–1, 1).

Gọi M là 1 điểm bất kỳ trên (E).

a) Tiếp tuyến của (E) tại M cắt trục hoành và tung tại P và Q. Tìm M sao cho diện tích ΔOPQ nhỏ nhất.

b) Tìm M sao cho diện tích ΔMAB lớn nhất.

BT6. Cho (E) : $4x^2 + 9y^2 = 36$ và M(1, 1).

Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua M và cắt (E) tại A và B mà M là trung điểm AB.

BT7. *Dự bị khối D 2005*

Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (E) : $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1$, biết (d) cắt Ox, Oy tại A và B mà OA = 2OB.

BT8. *Dự bị khối B 2003*

Cho (E) : $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Viết phương trình đường thẳng d_1, d_2 qua M(–2, 3) và tiếp xúc (E). Tìm n để trong các tiếp tuyến của (E) qua N(5, n) có tiếp tuyến song song d_1 hoặc d_2.

12 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Phương trình chính tắc (E) qua M(1, 0) và $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ là :

a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ b) $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$

c) $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2} = 1$ d) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$.

2 Cho (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a > b). Biết các đỉnh trên trục nhỏ nhìn 2 tiêu điểm dưới 1 góc vuông thì tâm sai e bằng :

a) $e = \sqrt{2}$ b) $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $e = \frac{1}{2}$ d) e = 1.

3 Phương trình chính tắc (E) có độ dài trục lớn $4\sqrt{2}$, 2 đỉnh trên trục nhỏ và 2 tiêu điểm cùng nằm trên 1 đường tròn là :

a) $\dfrac{x^2}{32} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ b) $\dfrac{x^2}{32} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

c) $\dfrac{x^2}{32} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ d) $\dfrac{x^2}{32} + \dfrac{y^2}{2} = 1$.

4 (E) : $x^2 + 5y^2 = 20$ và (d) : $y = x + m$ có điểm chung khi :

a) $m \in [-2\sqrt{6}, 2\sqrt{6}]$ b) $m \in (-2\sqrt{6}, 2\sqrt{6})$

c) $m \le -2\sqrt{6} \vee m \ge 2\sqrt{6}$ $m < -2\sqrt{6} \vee m > 2\sqrt{6}$.

5 Cho (E) có độ dài trục lớn 26, tâm sai $e = \dfrac{12}{13}$. Độ dài trục nhỏ của (E) là :

a) 5 b) 10 c) 12 d) 24.

6 Cho M(2, 3) ∈ (E) : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Điểm nào sau đây không nằm trên (E)

a) N(–2, 3) b) H(2, –3) c) K(–2, –3) d) I(3, 2).

7 Cho (E) : $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$.

Đường thẳng qua tiêu điểm của (E) cắt (E) tại M và N thì độ dài MN là :

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 1 c) $\dfrac{3}{2}$ d) 3.

8 Phương trình chính tắc (E) tiếp xúc (d) : $3x - 2y - 20 = 0$

và (d') : $x + 6y - 20 = 0$ là :

a) $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{40} = 1$ b) $\dfrac{x^2}{40} + \dfrac{y^2}{10} = 1$

c) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ d) $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

9 Cho (E) : $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ và (Δ) : $x + y + 5 = 0$.

Tích các khoảng cách từ hai tiêu điểm của (E) đến Δ bằng :

a) 16 b) 9 c) 81 d) 7.

10 (E) : $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ và (C) : $x^2 + y^2 = 25$ có số điểm chung là :

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3.

11 Tiếp tuyến của (E) : $x^2 + 5y^2 = 9$ có hệ số góc $-\dfrac{2}{5}$ là :

a) $2x + 5y + 9 = 0$ b) $2x + 5y - 9 = 0$

c) Hai kết quả a, b đều đúng. d) Hai kết quả a, b đều sai.

12 Cho (E) : $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Từ M(2, 1) kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB đến (E) với A, B là tiếp điểm thì phương trình AB là :

a) $x + 2y - 2 = 0$ b) $\frac{x}{4} + y = 1$

c) $2x + y - 1 = 0$ d) $2x + y + 1 = 0$.

TRẢ LỜI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Phương trình (E) dạng : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$M(1, 0) \in (E) \Rightarrow \frac{1}{a^2} = 1 \Rightarrow a = 1$

$N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \in (E) \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow b = 2$

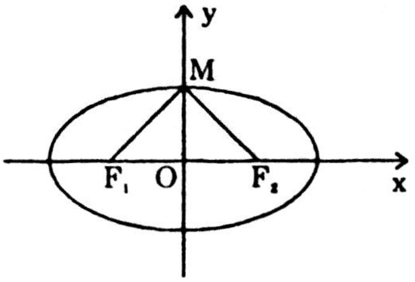
(E) : $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$. Chọn b.

2 ΔMF_1F_2 vuông cân $\Rightarrow OM = \frac{F_1F_2}{2}$

$\Rightarrow b = c$

Mà $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 2c^2 = a^2$

Vậy : $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow e = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Chọn b.

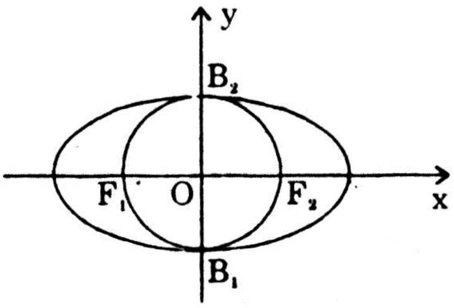


3 Yêu cầu bài toán $\Rightarrow 2c = 2b$

Mà $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$

$\Rightarrow b^2 = \frac{a^2}{2} = 16$

Phương trình (E) : $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$. Chọn a.



4 Xét pt : $x^2 + 5(x + m)^2 = 20 \Leftrightarrow 6x^2 + 10mx + 5m^2 - 20 = 0$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta' = 25m^2 - 6(5m^2 - 20) \geq 0$

$\Leftrightarrow -5m^2 + 120 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 24 \leq 0$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{6} \leq m \leq 2\sqrt{6}$. Chọn a.

5 $2a = 26 \quad \Rightarrow \quad a = 13$

$$e = \frac{c}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{12}{13} = \frac{c}{13} \quad \Leftrightarrow \quad c = 12$$

Vậy $\quad c^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = a^2 - c^2 = 169 - 144 = 25$

$\Rightarrow \quad b = 5.$ Chọn b.

6 Do trục hoành, trục tung là trục đối xứng của (E).

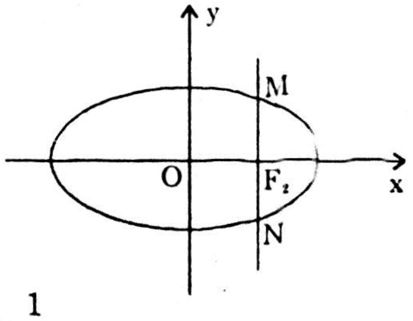
O(0, 0) là tâm đối xứng của (E).

M ∈ (E) thì H, K, N ∈ (E).

Câu d sai.

7 $(E) : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2 = 3$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$NF_2 = r_2 = a - ex_{F_2} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}\right) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \quad MN = 2NF_2 = 1.$ Chọn b.

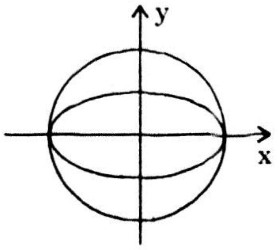
8 Do điều kiện tiếp xúc : $\begin{cases} 9a^2 + 4b^2 = 400 \\ a^2 + 36b^2 = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 40 \\ b^2 = 10 \end{cases}$

Phương trình chính tắc (E) : $\dfrac{x^2}{40} + \dfrac{y^2}{10} = 1.$ Chọn b.

9 $c^2 = 16 - 9 = 7 \quad \Rightarrow \quad F_1(\sqrt{7}, 0); F_2(\sqrt{7}, 0)$

$$\delta(F_1; \Delta).\delta(F_2; \Delta) = \frac{|-\sqrt{7} + 5|}{\sqrt{2}} . \frac{|\sqrt{7} + 5|}{\sqrt{2}} = \frac{25 - 7}{2} = 9.$$ Chọn b.

10 Từ hình vẽ, số điểm chung là 2.



Cách khác : Xét hệ : $\begin{cases} 10x^2 + 25y^2 = 400 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 25 \\ y^2 = 0 \end{cases}$ Chọn c.

11 Phương trình tiếp tuyến dạng : $\quad y = -\dfrac{2}{5}x + m$

$$\Leftrightarrow \quad 2x + 5y - 5m = 0$$

Phương trình (E) : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\frac{9}{5}} = 1$

Do điều kiện tiếp xúc : $a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$

$$\Rightarrow \quad 9 \times 4 + \frac{9}{5} \times 25 = 25m^2$$

$$\Rightarrow \quad m^2 = \frac{81}{25} \quad \Rightarrow \quad m = \pm\frac{9}{5}$$

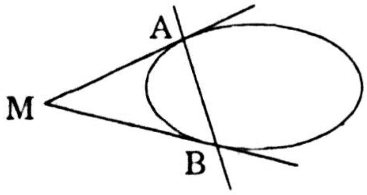
Phương trình tiếp tuyến là : $2x + 5y \pm 9 = 0$. Chọn c.

12 Gọi $A(x_1, y_1)$ thì phương trình tiếp tuyến của (E) tại A : $\frac{xx_1}{4} + yy_1 = 1$

M(2, 1) ∈ tiếp tuyến $\Rightarrow \quad \frac{2x_1}{4} + y_1 = 1 \qquad (1)$

Tương tự $B(x_2, y_2)$ thì $\quad \frac{2x_2}{4} + y_2 = 1 \qquad (2)$

Từ (1), (2) ⇒ phương trình (AB) : $x + 2y - 2 = 0$. Chọn a.

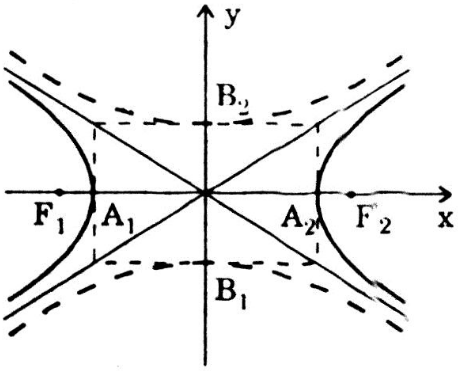


Bài 6

HYPERBOL

1. Định nghĩa :

Cho 2 điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c$ và hằng số $2a$ $(c > a > 0)$.



$M \in$ *hyperbol* $(H) \Leftrightarrow |F_1M - F_2M| = 2a$

- F_1, F_2 : *2 tiêu điểm.*
- $F_1F_2 = 2c$ *tiêu cự*
- $r_1 = F_1M$, $r_2 = F_2M$: *2 bán kính qua tiêu điểm của M.*

2. Phương trình chính tắc, các yếu tố và tính chất

Phương trình chính tắc (H)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Trục thực trên Ox)
Độ dài trục thực	$2a$
Độ dài trục ảo	$2b$
Tiêu điểm	$F_1(-c), 0)$; $F_2(c, 0)$ với $c^2 = a^2 + b^2$
Tâm sai	$e = \frac{c}{a}$ $(e > 1)$
Đường tiệm cận	$y = \pm \frac{b}{a} x$
Đường chuẩn	$(\Delta_1) : x = -\frac{a}{e}$, $(\Delta_2) : x = \frac{a}{e}$
Bán kính qua tiêu điểm của $M(x_M, y_M) \in (H)$	• M∈ nhánh phải $(x \geq a)$ $\begin{cases} r_1 = ex_M + a \\ r_2 = ex_M - a \end{cases}$ • M∈ nhánh trái $(x \leq -a)$ $\begin{cases} r_1 = -ex_M - a \\ r_2 = -ex_M + a \end{cases}$
Phương trình tiếp tuyến với (H) tại $M(x_o, y_o) \in (H)$	$\frac{x_o x}{a^2} - \frac{y_o y}{b^2} = 1$
Điều kiện tiếp xúc của (H) và đường thẳng $(\Delta) : Ax + By + C = 0$	$\begin{cases} A^2a^2 - B^2b^2 = C^2 \\ C \neq 0 \end{cases}$

BÀI TẬP

Bài 1. Lập phương trình chính tắc hyperbol với tổng hai bán trục a + b = 7, hai tiệm cận xiên $y = \pm\frac{3}{4}x$.

a) Tính độ dài hai bán trục. Vẽ (H).

b) Lập phương trình các tiếp tuyến của (H) biết tiếp tuyến song song với (d) : $5x - 4y + 10 = 0$.

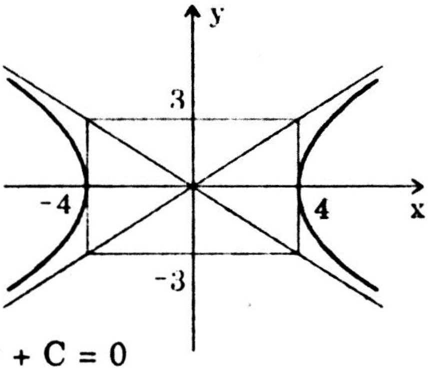
GIẢI

a) Tiệm cận xiên : $y = \pm\frac{3}{4}x$ nên $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ $\Leftrightarrow$ $b = \frac{3}{4}a$

Mà a + b = 7 nên $a + \frac{3}{4}a = 7 \Leftrightarrow a = 4$

Vậy 3 = b

Phương trình (H) : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$



b) Do tiếp tuyến // (d) : $5x - 4y + 10 = 0$

nên phương trình tiếp tuyến có dạng : $5x - 4y + C = 0$

Do điều kiện tiếp xúc $\Rightarrow$ $16(25) - 16(9) = C^2$

$\Rightarrow$ $C^2 = 256$ $\Rightarrow$ $C = \pm 16$

Vậy phương trình hai tiếp tuyến là : $5x - 4y \pm 16 = 0$. ■

Bài 2. Cho (H) : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$.

a) Viết phương trình đường thẳng (D) là tiếp tuyến của (H) qua A(2, −1).

b) Gọi M_1 là tiếp điểm của (H) và (D). Chứng minh (D) là phân giác của góc $\widehat{F_1M_1F_2}$.

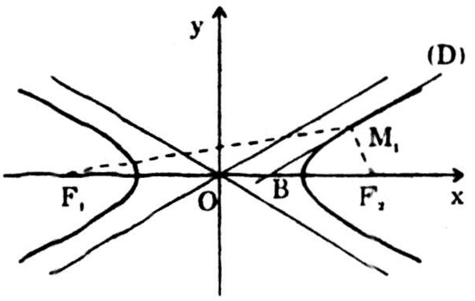
GIẢI

a) Phương trình đường thẳng qua A và có PVT (m, n)

$$m(x - 2) + n(y + 1) = 0 \quad (D)$$

(D) tiếp xúc (H) $\Leftrightarrow$ $16m^2 - 4n^2 = (n - 2m)^2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \neq 2m \\ 12m^2 + 4mn - 5n^2 = 0 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \neq 2m \\ m = \dfrac{-2n \pm 8n}{12} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{n}{2} \text{ (loại)} \\ -\dfrac{5}{6}n \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad m = -\frac{5}{6}n$$

Chọn $n = 6 \wedge m = -5$

Vậy phương trình tiếp tuyến (D) qua A là :

$$-5(x - 2) + 6(y + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5x - 6y - 16 = 0.$$

b) Gọi $M_1(x_1, y_1)$ là tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến của (H) tại M_1 là :

$$\frac{xx_1}{16} - \frac{yy_1}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad + xx_1 - 4y_1y - 16 = 0$$

Do đây cũng là phương trình (D) nên $\dfrac{x_1}{5} = \dfrac{-4y_1}{-6} = \dfrac{-16}{-16} = 1$.

Vậy $M_1\left(5, \dfrac{3}{2}\right)$.

Do $M_1 \in$ nhánh phải của (H) nên : $\begin{cases} r_1 = M_1F_1 = ex_{M_1} + a = \dfrac{5\sqrt{5}}{2} + 4 \\ r_2 = M_1F_2 = ex_{M_1} - a = \dfrac{5\sqrt{5}}{2} - 4 \end{cases}$

(D) cắt trục hoành tại $B\left(\dfrac{16}{5}, 0\right)$

vậy $BF_1 = 2\sqrt{5} + \dfrac{16}{5} = \dfrac{2}{5}\left(5\sqrt{5} + 8\right)$ và $BF_2 = 2\sqrt{5} - \dfrac{16}{5} = \dfrac{2}{5}\left(5\sqrt{5} - 8\right)$

Ta có : $\dfrac{M_1F_1}{M_1F_2} = \dfrac{5\sqrt{5} + 8}{5\sqrt{5} - 8} = \dfrac{BF_1}{BF_2}$

Vậy (D) là phân giác $\widehat{F_1M_1F_2}$. ■

Bài 3. Cho (H) : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

a) Tính độ dài phần tiệm cận chắn bởi 2 đường chuẩn.

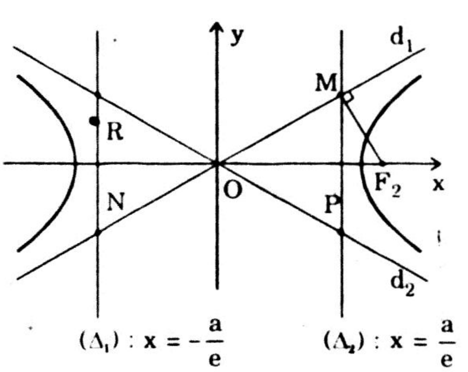
b) Tính khoảng cách từ các tiêu điểm của (H) đến các đường tiệm cận.

c) Chứng minh chân đường vuông góc hạ từ một tiêu điểm đến đường tiệm cận thì nằm trên đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó.

GIẢI

a) Phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_2 là (Δ_2) : $x = \dfrac{a}{e}$

Phương trình tung độ giao điểm M của tiệm cận xiên (d_1) : $y = \dfrac{b}{a}x$ và


y
d1
M
R
F2
x
N
O
P
d2
$(\Delta_1) : x = -\frac{a}{e}$
$(\Delta_2) : x = \frac{a}{e}$

(Δ_2) là $y = \frac{b}{a}.\frac{a}{e} = \frac{b}{e}$. Do đó : $M\left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e}\right)$.

Vậy $OM^2 = \frac{a^2 + b^2}{e^2} = \frac{c^2}{\frac{c^2}{a^2}} = a^2$

Do Ox, Oy là trục đối xứng của (H) nên MN = PR = 2OM = 2a.

b) Ta có : $F_2(c, 0)$ và $(d_1) : bx - ay = 0$

nên $\delta(F_2, d_1) = \frac{|bc - a.0|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{bc}{c} = b$

Do Ox, Oy là trục đối xứng của (H) nên :

$$\delta(F_2, d_2) = \delta(F_1, d_1) = \delta(F_1, d_2) = \delta(F_2, d_1) = b.$$

c) Ta có : $\overrightarrow{OM} = \left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e}\right)$ và $\overrightarrow{F_2M} = \left(\frac{a}{e} - c, \frac{b}{e}\right)$

Vậy : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{F_2M} = \frac{a}{e}\left(\frac{a}{e} - c\right) + \frac{b^2}{e^2} = \frac{a^2}{e^2} - \frac{a}{e}.c + \frac{b^2}{e^2}$

$$= \frac{a^2 - ac\left(\frac{c}{a}\right) + b^2}{e^2} = \frac{a^2 - c^2 + b^2}{e^2} = 0$$

Do đó $OM \perp F_2M$. ■

Bài 4. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên hyperbol (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ đến hai đường tiệm cận là một hằng số.

GIẢI

Gọi $M(x_o, y_o) \in (H)$ nên : $\frac{x_o^2}{a^2} - \frac{y_o^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x_o^2 - a^2y_o^2 = a^2b^2$

Phương trình các đường tiệm cận của (H) là :

$$y = \pm\frac{b}{a}x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} bx - ay = 0 & (\Delta_1) \\ bx - ay = 0 & (\Delta_2) \end{array}\right.$$

Vậy $d(M, \Delta_1).d(M, \Delta_2) = \frac{|bx_o - ay_o|}{\sqrt{b^2 + a^2}}.\frac{|bx_o + ay_o|}{\sqrt{b^2 + a^2}}$

$= \frac{|b^2x_o^2 - a^2y_o^2|}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$ = hằng số ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. Cho (H) : $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

a) Xác định tọa độ các đỉnh, tiêu điểm, tâm sai và các tiệm cận của (H). Vẽ (H) đã cho.

b) Tìm các giá trị của n để đường thẳng $y = nx - 1$ có điểm chung với (H).

BT2. Cho (H) : $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

a) Tìm độ dài trục thực, trục ảo, tâm sai, tiêu điểm F_1, F_2 của (H). Vẽ (H).

b) Tìm trên (H) các điểm M sao cho $MF_1 \perp MF_2$.

BT3. Cho (H) : $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$

a) Định tiêu điểm. Viết phương trình các tiệm cận.

b) Cho $M(x_o, y_o)$. Tính tích số khoảng cách từ M đến các tiệm cận.

BT4. Cho (H) : $2x^2 - y^2 + 4 = 0$. Tìm các điểm trên trục hoành mà từ đó vẽ 2 tiếp tuyến đến (H) vuông góc với nhau.

BT5. Viết phương trình chính tắc của Hyperbol biết :

a) (H) qua $M\left(4\sqrt{2},\ 3\right)$ và có tiêu điểm trùng với tiêu điểm của (E) $\dfrac{x^2}{35} + \dfrac{y^2}{10} = 1$.

b) (H) tiếp xúc với 2 đường thẳng $d_1 : 5x - 6y - 16 = 0$

và $d_2 : 13x - 10y - 48 = 0$.

BT6. Viết phương trình chính tắc của Hyperbol (H) tiếp xúc 2 đường thẳng

$$d_1 : 5x - 6y + 8 = 0\ ; \qquad d_2 : 5x + 8y + 6 = 0.$$

Chứng minh rằng từ $A\left(1, \sqrt{2}\right)$ luôn vẽ được 2 tiếp tuyến đến (H) vuông góc với nhau.

BT7. Cho (H) : $y = \dfrac{1}{x}$. Khi $M \in (H)$ gọi khoảng cách từ A đến (H) là khoảng cách ngắn nhất từ A đến M.

a) Cho $A(a, -a)$ tính $\delta(A, (H))$.

b) Tìm tâm và bán kính của đường tròn tiếp xúc (d) : $y = x + 1$ và 2 nhánh của (H).

c) Cho B, C, D trên (H). Chứng minh trực tâm K của ΔBCD cũng nằm trên (H).

BT8. Trong mp Oxy xem các conic (C) có phương trình :

$$(m^2 - 4)x^2 - 4y^2 = 4(m^2 - 4) \quad \text{trong đó m tham số.}$$

a) Tùy theo m chỉ rõ bản chất (C_m) và cho biết tâm, đỉnh, tiêu điểm, tiệm cận nếu có.

b) Vẽ C_0 và $C_{2\sqrt{2}}$ trên cùng một hình.

BT9. Trên mp(Oxy) tìm M(x, y) sao cho khoảng cách từ M đến F(0, 4) bằng 2 lần khoảng cách từ M đến đường thẳng y = 1. Tập hợp đó là đường gì ?

12 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

$\boxed{1}$ Cho (H) : $9x^2 - 16y^2 = 144$. Kết luận nào sau đây là sai :

a) Độ dài trục thực bằng 8.
b) Độ dài trục ảo bằng 6.
c) Tiêu cự bằng 10.
d) Phương trình 2 tiệm cận $y = \pm\frac{4}{3}x$.

$\boxed{2}$ Phương trình chính tắc của (H) có tiêu điểm trên x'Ox, độ dài trục thực bằng 8, tâm sai $e = \frac{5}{2}$ là :

a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{84} = 1$
b) $\frac{x^2}{84} - \frac{y^2}{16} = 1$
c) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{84} = 1$
d) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{100} = 1$.

$\boxed{3}$ Cho (H) : $\frac{x^2}{99} - \frac{y^2}{33} = 1$ thì góc giữa 2 đường tiệm cận là :

a) 90^0
b) 60^0
c) 45^0
d) 30^0.

$\boxed{4}$ Phương trình chính tắc (H) có tiêu cự bằng 20 và một tiệm cận có phương trình 4x – 3y = 0 là :

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
c) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$
d) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

$\boxed{5}$ Cho (H) : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Kết luận nào sau đây là sai :

a) Tiêu điểm $F_1(-5, 0)$; $F_2(5, 0)$.
b) Phương trình 2 tiệm cận : $y = \pm\frac{4}{3}x$.
c) Tâm sai $e = \frac{5}{3}$.
d) Phương trình 2 đường chuẩn $x = \pm\frac{3}{25}$.

6 Phương trình chính tắc (H) qua $M(4, \sqrt{6})$; $N(\sqrt{6}, -1)$ là :

a) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{2} = 1$ b) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

c) $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ d) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{8} = 1$.

7 Gọi M là điểm bất kì trên (H) : $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ thì tích các khoảng cách từ M đến 2 tiêm cận của (H) là :

a) $\dfrac{10}{9}$ b) $\dfrac{9}{10}$ c) $\dfrac{8}{9}$ d) $\dfrac{9}{8}$.

8 Cho (H) : $8x^2 - y^2 = 8$ và (d) : $y = 2x + m$. Kết luận nào sau đây là đúng :

a) (d) và (H) không có điểm chung.

b) (d) và (H) có 1 điểm chung.

c) (d) cắt (H) tại 2 điểm cùng 1 nhánh.

d) (d) cắt (H) tại 2 điểm thuộc 2 nhánh.

9 Cho (E) : $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{2} = 1$. Phương trình chính tắc (H) có 2 tiệm cận $y = \pm 2x$ và 2 tiêu điểm (H) trùng với tiêu điểm (E) là :

a) $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{2} = 1$ b) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{8} = 1$

c) $-\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ d) $-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{8} = 1$.

10 Phương trình tiếp tuyến của (H) : $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{5} = 1$ tại T(6, 2) là :

a) $3x - 4y + 10 = 0$ b) $3x - 4y - 10 = 0$

c) $3x + 4y + 10 = 0$ d) $3x + 4y - 10 = 0$.

11 Phương trình tiếp tuyến của (H) : $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{5} = 1$. Biết tiếp tuyến vuông góc (d) : $4x + 3y - 1 = 0$.

a) $3x + 4y - 10 = 0$ b) $3x - 4y + 10 = 0$

c) Hai kết quả a, b đều sai. d) Hai kết quả a, b đều đúng.

12 Cho (H) : $x^2 - 2y^2 = 4$. Từ I(2, 3) kẻ hai tiếp tuyến đến (H). Gọi hai tiếp điểm là A, B thì phương trình AB :

a) $x + 3y + 2 = 0$ b) $x + 3y - 2 = 0$

c) $2x + y - 1 = 0$ d) $x - 3y - 2 = 0$.

TRẢ LỜI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

$\boxed{1}$ (H) : $9x^2 - 16y^2 = 144 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

$$a^2 = 4,\ b^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 = 13$$

Tiêu cự : $2c = 2\sqrt{13}$. Câu c sai.

$\boxed{2}$ $a = 4$ và $e = \dfrac{5}{2} = \dfrac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad c = \dfrac{5}{2} \times 4 = 10$

Mà $c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 100 - 16 = 84$

Phương trình (H) : $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{84} = 1$. Chọn a.

$\boxed{3}$ Ta có $a = \sqrt{99}$, $b = \sqrt{33}$

Phương trình 2 tiệm cận : $y = \pm \dfrac{b}{a} x = \pm \dfrac{\sqrt{33}}{\sqrt{99}} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}} x$

Tiệm cận d_1 có : $k = \text{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30^0$

Vậy góc 2 tiệm cận là 60^0. Chọn b.

$\boxed{4}$ TCX : $y = \dfrac{4}{3} x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{b}{a} = \dfrac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad b = \dfrac{4}{3} a$

Mà $c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad 100 = a^2 + \dfrac{16}{9} a^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 6 \\ b = 8 \end{cases}$ Chọn câu c.

$\boxed{5}$ Kết luận a, b, c đều đúng.

Phương trình 2 đường chuẩn : $x = \pm \dfrac{a}{e} = \pm \dfrac{3}{\frac{5}{3}} = \pm \dfrac{9}{5}$. → d sai.

$\boxed{6}$ Phương trình (H) dạng : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$M(4, \sqrt{6}) \in (H) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{16}{a^2} - \dfrac{6}{b^2} = 1$

$N(\sqrt{6}, -1) \in (H) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{6}{a^2} - \dfrac{1}{b^2} = 1$

Vậy $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$ Chọn a.

$\boxed{7}$ $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{9}=1$ có 2 tiệm cận : $y=\pm 3x \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}3x-y=0\ (d_1)\\ 3x+y=0\ (d_2)\end{array}\right.$

$M(x_0, y_0) \in (H) \quad \Rightarrow \quad 9x_0^2 - y_0^2 = 9$

Ta có : $\delta(M; d_1).\delta(M; d_2) = \frac{|3x_0 - y_0|}{\sqrt{10}}.\frac{|3x_0 + y_0|}{\sqrt{10}} = \frac{|9x_0^2 - y_0^2|}{10} = \frac{9}{10}.$

Chọn b.

$\boxed{8}$ Phương trình hoành độ giao điểm : $8x^2 - (2x+m)^2 = 8$

$\Leftrightarrow \quad 4x^2 - 4mx - m^2 - 8 = 0 \quad (*)$

Do ac < 0 nên (*) có 2 nghiệm phân biệt. a, b sai.

Ta có : $f(-1) = 4 + 4m - m^2 - 8 = -(m^2 - 4m + 4) \leq 0$

$f(1) = -(m^2 + 4m + 4) \leq 0$

Vậy A, B ∈ 2 nhánh của (H). Chọn d.

$\boxed{9}$ (E) có $c^2 = 12 - 2 = 10$

(H) có 2 tiệm cận : $y = \pm 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{a} = 2 \quad \Rightarrow \quad b = 2a$

Vậy $c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad 10 = a^2 + 4a^2 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l}a^2 = 2\\ b^2 = 4a^2 = 8\end{array}\right.$

Phương trình (H) : $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$. Chọn b.

$\boxed{10}$ Phương trình tiệm cận của (H) : $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ tại T(6, 2) là :

$\frac{6x}{20} - \frac{2y}{5} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 6x - 8y - 20 = 0$. Chọn b.

$\boxed{11}$ Tiếp tuyến ⊥ (d) : $4x + 3y - 1 = 0$ nên có dạng $3x - 4y + c = 0$.

Do điều kiện tiếp xúc : $a^2A^2 - b^2B^2 = c^2$

$\Rightarrow \quad 20(3)^2 - 5(4)^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad c = \pm 10$

Chọn c : $3x - 4y \pm 10 = 0$.

$\boxed{12}$ Gọi $A(x_1, y_1)$ thì phương trình tiếp tuyến của (H) tại A : $xx_1 - 2yy_1 = 4$.

I ∈ tiếp tuyến $\quad \Rightarrow \quad 2x_1 - 6y_1 = 4 \quad (1)$

Tương tự $B(x_2, y_2) \quad \Rightarrow \quad 2x_2 - 6y_2 = 4$

Vậy phương trình (AB) : $x - 3y - 2 = 0$. Chọn d.

Bài 7

PARABOL

Cho điểm F cố định và đường thẳng cố định (Δ) với $\delta(F, \Delta) = p$

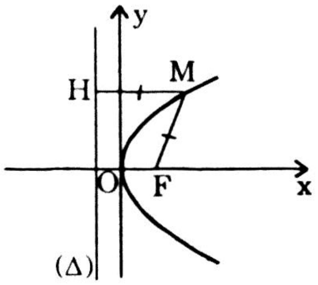
$$\boxed{M \in (P) \Leftrightarrow MF = \delta(M, \Delta)}$$

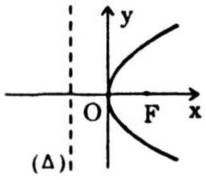
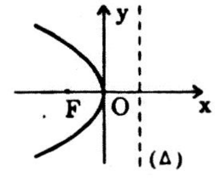
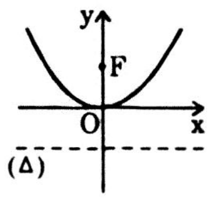
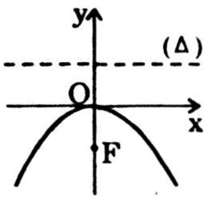
Gọi *F : tiêu điểm*

(Δ) : đường chuẩn

r = FM : bán kính qua tiêu

p > 0 : tham số tiêu



Phương trình chính tắc (P)	$y^2 = 2px$ (Trục đối xứng Ox)	$y^2 = -2px$ (Trục đối xứng Ox)	$x^2 = 2py$ (Trục đối xứng Oy)	$x^2 = -2py$ (Trục đối xứng Oy)
Tiêu điểm	$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$	$F\left(0, \frac{p}{2}\right)$	$F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$
Đường chuẩn	$(\Delta): x + \frac{p}{2} = 0$	$(\Delta): x - \frac{p}{2} = 0$	$(\Delta): y + \frac{p}{2} = 0$	$(\Delta): y - \frac{p}{2} = 0$
Bán kính qua tiêu điểm của $M(x_M, y_M) \in (P)$	$r = \frac{p}{2} + x_M$	$r = \frac{p}{2} - x_M$	$r = \frac{p}{2} + y_M$	$r = \frac{p}{2} - y_M$
Phương trình tiếp tuyến với (P) tại $M(x_o, y_o) \in (P)$	$y_oy = p(x_o + x)$	$y_oy = -p(x_o + x)$	$x_ox = p(y_o + y)$	$x_ox = -p(y_o + y)$
Điều kiện tiếp xúc của (P) và đường thẳng $Ax + By + C = 0$	$B^2p = 2AC$	$B^2p = -2AC$	$A^2p = 2BC$	$A^2p = -2BC$
Tâm sai	$e = 1$	$e = 1$	$e = 1$	$e = 1$
Hình dạng (P)				

BÀI TẬP

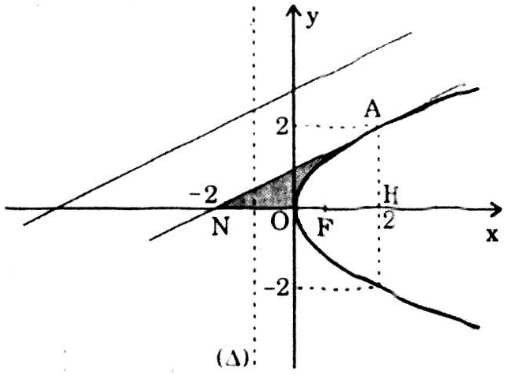
Bài 1. Cho (P) : $y^2 = 2x$.

a) Xác định đường chuẩn, tiêu điểm của (P) và vẽ (P).

b) Cho (D) : $x - 2y + 6 = 0$. Tìm M ∈ (P) sao cho khoảng cách từ M đến (D) ngắn nhất.

c) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P), trục Ox và tiếp tuyến của (P) tại A(2, 2).

GIẢI



a) $y^2 = 2x = 2px \quad \Rightarrow \quad p = 1$

Vậy tiêu điểm $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$,

Phương trình đường chuẩn $(\Delta) : x = -\frac{1}{2}$

b) Gọi $M\left(\frac{m^2}{2}, m\right) \in (P) : y^2 = 2x$

$$\text{Ta có : } \delta(M, D) = \frac{\left|\frac{m^2}{2} - 2m + 6\right|}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{m^2}{2} - 2m + 6}{\sqrt{5}} \text{ (do } \frac{m^2}{2} - 2m + 6 > 0 \ \forall m)$$

$$\text{Vậy} \quad \delta(M, D) = f(m) = \frac{1}{2\sqrt{5}}(m^2 - 4m + 12) = \frac{1}{2\sqrt{5}}[(m - 2)^2 + 8] \geq \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Vậy khoảng cách từ M đến (D) ngắn nhất bằng $\frac{4}{\sqrt{5}}$ xảy ra khi M(2, 2).

c) Phương trình tiếp tuyến của (P) tại A(2, 2) :

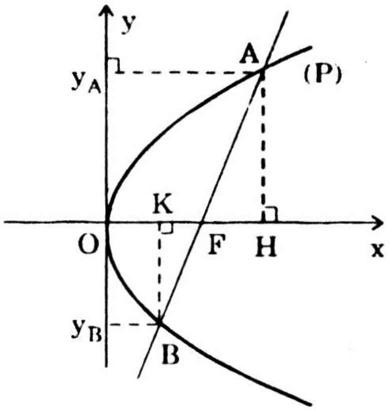
$$y.2 = x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + 1$$

Tiếp tuyến cắt Ox tại N (–2, 0). Vẽ AH ⊥ Ox

$$\text{Vậy S cần tìm} = S_{(\Delta ANH)} - \int_0^2 \sqrt{2x}\, dx = \frac{1}{2}.(2)(4) - \sqrt{2}\,\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^2$$

$$= 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}\text{đvdt}. \ ■$$

Bài 2. Cho (P) : $y^2 = 4x$. Một đường thẳng bất kỳ qua tiêu điểm của P) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B. Chứng minh tích các khoảng cách từ 2 điểm A, B đến trục của (P) là một hằng số.



GIẢI

Ta có : $y^2 = 4x = 2px \Rightarrow p = 2$

Vậy tiêu điểm F(1, 0)

Phương trình đường thẳng qua F và có PVT (m, n) :

$$m(x - 1) + ny = 0 \qquad (d)$$

Phương trình tung độ giao điểm (d) và (P) là :

$$m\left(\frac{y^2}{4} - 1\right) + ny = 0 \quad \Leftrightarrow \quad my^2 + 4ny - 4m = 0 \qquad (*)$$

Ta có : (d) cắt (P) tại 2 điểm A, B $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 4n^2 + 4m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0$

Lúc đó gọi y_A, y_B là 2 nghiệm của (*) thì :

$$\delta(A, Ox).\delta(B, Oy) = |y_A|.|y_B| = \left|-\frac{4m}{m}\right| = 4 \text{ (hằng số)}. \; ■$$

> **Bài 3.** Cho A(0, 2) và B(m, –2). Viết phương trình đường trung trực (d) của AB. Chứng minh (d) luôn tiếp xúc 1 đường cong (C) cố định khi m thay đổi.

GIẢI

$M(x, y) \in (d) \quad \Leftrightarrow \quad MA^2 = MB^2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + (y - 2)^2 = (x - m)^2 + (y + 2)^2$

$\Leftrightarrow \quad -4y + 4 = -2mx + m^2 + 4y + 4$

$\Leftrightarrow \quad 2mx - 8y - m^2 = 0 \qquad (d)$

$M(x_o, y_o) \notin (d)\ \forall m \quad \Leftrightarrow \quad m^2 - 2x_om + 8y_o = 0$ vô nghiệm m

$\Leftrightarrow \quad \Delta' = x_o^2 - 8y_o < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_o^2 < 8y_o$

Xét (P) : $x^2 = 8y \qquad (p = 4)$

Ta có : $A^2p = (2m)^2.4 = 16m^2 = 2BC \quad \forall m$

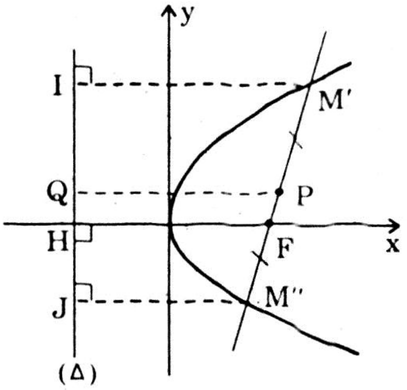
Do đó (D) luôn tiếp xúc (P) cố định $x^2 = 8y$. ■

> **Bài 4.** Cho (P) : $y^2 = 2px$ và đường thẳng (D) : $2mx - y - mp = 0$.
>
> Gọi M', M" là giao điểm của (D) và (P). Chứng minh đường tròn đường kính M'M" tiếp xúc đường chuẩn của (P).

GIẢI

Dễ dàng thấy tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \in (D)$.

Vẽ FH, M'I, M''J lần lượt vuông góc với đường chuẩn Δ. Gọi P là trung điểm M'M'' vẽ PQ ⊥ Δ.



Do định nghĩa parabol ta có :

$$M'F = \delta(M', \Delta) = M'I$$

và $$M''F = \delta(M'', \Delta) = M''J$$

Do PQ là đường trung bình của hình thang ta có :

$$PQ = \delta(P, \Delta) = \frac{M'I + M''J}{2} = \frac{M'F + M''F}{2} = \frac{M'M''}{2} = R$$

Vậy (Δ) luôn tiếp xúc đường tròn $\left(P, \frac{M'M''}{2}\right)$. ■

Bài 5. Cho A(3, 0) và (P) : $y = x^2$.

a) Cho M ∈ (P) có $x_M = a$. Tính AM. Tìm a để AM ngắn nhất.

b) Chứng minh nếu AM ngắn nhất thì AM vuông góc với tiếp tuyến tại M của (P).

GIẢI

a) Cho $M(a, a^2) \in (P)$.

Xét hàm : $f(a) = AM^2 = (a - 3)^2 + a^4 = a^4 + a^2 - 6a + 9$

Miền xác định : D = R

$$f'(a) = 4a^3 + 2a - 6 = 2(a - 1)(2a^2 + 2a + 3)$$

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ vì } 2a^2 + 2a + 3 > 0\ \forall a$$

a	$-\infty$		1		$+\infty$
f '(a)		−	0	+	
AM^2	$+\infty$	↘	5 CT	↗	$+\infty$

Vậy $AM_{min} = \sqrt{5} \Leftrightarrow a = 1$.

b) Khi AM ngắn nhất thì M(1, 1)

Vậy phương trình đường thẳng AM : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} \Leftrightarrow x + 2y - 3 = 0$

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại M ∈ (P) :

$$\frac{1}{2}(y + y_M) = xx_M \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0$$

AM vuông góc với tiếp tuyến tại M vì $\vec{n_1} . \vec{n_2} = 2 - 2 = 0$. ■

Bài 6. Cho $M \in (P): y^2 = 64x$ và $N \in (D): 4x + 3y + 46 = 0$.

a) Tìm tọa độ của M, N để MN ngắn nhất.

b) Chứng minh với kết quả tìm được MN vuông góc với tiếp tuyến tại M của (P).

GIẢI

a) Gọi $M\left(\frac{m^2}{64}, m\right) \in (P)$

$$\delta(M, D) = \frac{|4x_M + 3y_M + 46|}{5} = \frac{1}{5}\left(\frac{m^2}{16} + 3m + 46\right)$$

$$\text{do } \frac{m^2}{16} + 3m + 46 > 0 \quad \forall m$$

Xét $g(m) = \frac{m^2}{80} + \frac{3}{5}m + \frac{46}{5}$

Miền xác định : D = R

$$g'(m) = \frac{m}{40} + \frac{3}{5}; \quad g'(m) = 0 \Leftrightarrow m = -24$$

m	$-\infty$		-24		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
$g(m)$	$+\infty$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $MN_{min} \Leftrightarrow M(9, -24)$.

b) Lúc đó phương trình tiếp tuyến của (P) tại M :

$$yy_M = 32(x + x_M) \Leftrightarrow y(-24) = 32(x + 9)$$

$$\Leftrightarrow 4x + 3y + 36 = 0$$

Phương trình đường thẳng qua M và $\perp$ (D)

$$3(x - 9) - 4(y + 24) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y - 123 = 0.$$

Tọa độ N là nghiệm hệ phương trình :

$$\begin{cases} 3x - 4y = 123 \\ 4x + 3y = -46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{37}{5} \\ y = -\dfrac{126}{5} \end{cases}$$

Do đó : $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ cùng phương $\overrightarrow{n_D} = (4, 3)$

Vậy MN vuông góc với tiếp tuyến tại M. ■

Bài 7. Cho (P) : $y = \dfrac{x^2}{2}$ và $A\left(\dfrac{15}{8}, \dfrac{27}{8}\right)$.

a) Viết phương trình đường thẳng đi qua $B\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$ và vuông góc tiếp tuyến của (P) tại B.

b) Tìm tất cả điểm $M \in (P)$ sao cho AM vuông góc tiếp tuyến tại M của (P).

GIẢI

a) Vì $B\left(-1, \dfrac{1}{2}\right) \in (P)$ nên phương trình tiếp tuyến của (P) tại B là :

$$xx_B = y + y_B \Leftrightarrow -x = y + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + y + \frac{1}{2} = 0$$

Phương trình đường thẳng qua B và ⊥ tiếp tuyến của (P) tại B :

$$1(x+1) - 1\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x - y + \frac{3}{2} = 0.$$

b) Gọi $M\left(m, \dfrac{m^2}{2}\right) \in (P)$

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại M là :

$$xx_M = y + y_M \Leftrightarrow mx = y + \frac{m^2}{2} \Leftrightarrow mx - y - \frac{m^2}{2} = 0 \ (d)$$

(d) có VTPT $\vec{n} = (m, -1)$

Mặt khác $\overrightarrow{AM} = \left(m - \dfrac{15}{8}, \dfrac{m^2}{2} - \dfrac{27}{8}\right)$

AM vuông góc (d) $\Leftrightarrow$ $\vec{n}$ cùng phương $\overrightarrow{AM}$

$$\Leftrightarrow m\left(\frac{m^2}{2} - \frac{27}{8}\right) = -m + \frac{15}{8} \Leftrightarrow 4m^3 - 27m = -8m + 15$$

$$\Leftrightarrow 4m^3 - 19m - 15 = 0 \Leftrightarrow (m+1)(4m^2 - 4m - 15) = 0$$

$$\Leftrightarrow m_1 = -1 \vee m_2 = -\frac{3}{2} \vee m_3 = \frac{5}{2}$$

Vậy có 3 điểm $M_1\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$; $M_2\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{8}\right)$; $M_3\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{25}{8}\right)$. ■

Bài 8. Cho (P) : $y^2 = 4x$ và 2 đường thẳng (D) : $m^2x + my + 1 = 0$

(L) : $x - my + m^2 = 0$

(m tham số thực $\neq 0$)

a) Chứng minh (D) ⊥ (L) và giao điểm của (D), (L) di động trên 1 đường thẳng cố định khi m thay đổi.

b) Chứng minh (D) và (L) luôn tiếp xúc với (P). Gọi A, B là các tiếp điểm. Chứng minh AB đi qua 1 điểm cố định khi m thay đổi.

GIẢI

a) • (D) có pháp vectơ $\vec{n_1} = (m^2, m)$

(L) có PVT $\vec{n_2} = (1, -m)$

Ta có : $\vec{n_1}.\vec{n_2} = m^2 - m^2 = 0$. Vậy (D) ⊥ (L)

• Tọa độ giao điểm (D), (L) là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} m^2x + my = -1 \\ x - my = -m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = -1 \\ y_I = \dfrac{m^2 - 1}{m} \end{cases}$$

Vậy I di động trên đường thẳng cố định có phương trình $x = -1$.

b) • (P) : $y^2 = 4x = 2px \Rightarrow p = 2$

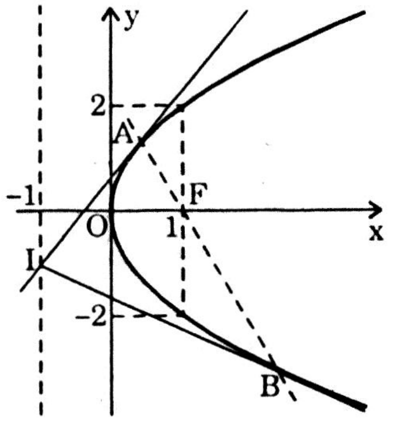
Xét (D) : $m^2x + my + 1 = 0$

Ta có : $B'^2p = m^2.2 = 2AC$ vậy (D) tiếp xúc (P) tại $A(x_A, y_A)$.

Xét (L) : $x - my + m^2 = 0$

Ta có : $B'^2p = (-m)^2.2 = 2AC$

vậy (L) tiếp xúc (P) tại $B(x_B, y_B)$.



• Phương trình tiếp tuyến của (P) tại A :

$$yy_A = 2(x + x_A)$$

Do tiếp tuyến qua $I\left(-1, \dfrac{m^2 - 1}{m}\right)$

nên : $\dfrac{m^2 - 1}{m} y_A = 2(-1 + x_A)$

Tương tự tiếp tuyến tại B qua I nên : $\dfrac{m^2 - 1}{m} y_B = 2(-1 + x_B)$

Do đó phương trình đường thẳng AB là : $\dfrac{m^2 - 1}{m} y = 2(-1 + x)$ (do tọa độ A và B đều nghiệm đúng phương trình)

Dễ dàng thấy AB luôn qua điểm cố định F(1, 0). ■

Bài 9. Cho (P) : $y^2 = 4x$

Đường thẳng (d) di động qua tiêu điểm F của (P) cắt (P) tại M và N. Chứng minh trung điểm I của MN di động trên 1 parabol cố định.

GIẢI

Phương trình (d) qua F(1, 0) và có PVT(α, β) là : $\alpha(x - 1) + \beta(y - 0) = 0$

Phương trình tung độ giao điểm (d) và (P) :

$$\alpha\left(\frac{y^2}{4} - 1\right) + \beta y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha y^2 + 4\beta y - 4\alpha = 0$$

Khi $\alpha \neq 0$ thì (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt M và N

Ta có tọa độ trung điểm I của MN là : $\begin{cases} x_I = 1 - \dfrac{\beta}{\alpha} y_I & \text{(do } I \in (d)\text{)} \quad (1) \\ y_I = \dfrac{y_M + y_N}{2} = -\dfrac{2\beta}{\alpha} & \quad (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow \dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{y_I}{2}$

Thay vào (1) ta được : $x_I = 1 + \dfrac{y_I^2}{2}$

Do đó I di động trên parabol có phương trình $y^2 = 2(x - 1)$. ■

Bài 10. Cho (P) : $y^2 = 8x$ và I(2, 4). Xét góc vuông quay quanh I và 2 cạnh góc vuông cắt (P) tại M, N. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

GIẢI

Gọi $M\left(\dfrac{m^2}{8}, m\right) \in (P)$ và $N\left(\dfrac{n^2}{8}, n\right) \in (P)$ Với $m, n \neq 4$ và $m \neq n$

Ta có : ΔIMN vuông tại I $\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{m^2}{8} - 2\right)\left(\frac{n^2}{8} - 2\right) + (m - 4)(n - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 16)(n^2 - 16) + 64(m - 4)(n - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m + 4)(n + 4) + 64 = 0 \text{ (do } m, n \neq 4)$$

$$\Leftrightarrow 80 + 4(m + n) + mn = 0 \quad (*)$$

Phương trình đường thẳng MN là : $\dfrac{x - \dfrac{m^2}{8}}{\dfrac{n^2}{8} - \dfrac{m^2}{8}} = \dfrac{y - m}{n - m}$

$$\Leftrightarrow \quad (n-m)\left(x-\frac{m^2}{8}\right)=\frac{1}{8}(n^2-m^2)(y-m)$$

$$\Leftrightarrow \quad 8x-\frac{m^2}{8}=\frac{1}{8}(n+m)(y-m)$$

$$\Leftrightarrow \quad 8x-(m+n)y+nm=0 \qquad (**)$$

Xét biểu thức (*) và (**) chọn $x_I = 10$ và $y_I = -4$ thì tọa độ điểm I nghiệm đúng phương trình (**)

Vậy MN luôn đi qua điểm cố định I(10, −4). ■

Bài 11. Cho (P) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = mx + 1$.

Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B. Tìm quỹ tích tâm đường tròn (OAB).

GIẢI

Phương trình hoành độ giao điểm (d) và (P) : $x^2 - mx - 1 = 0$ **(*)**

Do $ac = -1 < 0$ nên (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_A, x_B vậy (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B.

Xét $\overrightarrow{OA} = (x_A, y_A) = (x_A, mx_A + 1)$ và $\overrightarrow{OB} = (x_B, y_B) = (x_B, mx_B + 1)$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = x_A.x_B + m^2x_Ax_B + m(x_A + x_B) + 1$$

$$= -1 - m^2 + m(m) + 1 = 0 \qquad \text{(do định lý Viet)}$$

Vậy ΔOAB vuông tại O nên tâm I của đường tròn (OAB) chính là trung điểm cạnh huyền AB.

$$\text{Tọa độ I}\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{S}{2} = \dfrac{m}{2} & (1)\\ y_I = mx_I + 1 & (2)\end{cases}$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ $y_I = 2x_I^2 + 1$

Do đó quỹ tích tâm I của đường tròn (OAB) là (P') có phương trình :

$$y = 2x^2 + 1. \quad ■$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. Cho (P) : $y^2 = 16x$. Viết phương trình tiếp tuyến của (P).

a) Vuông góc (D) : $3x - 2y + 6 = 0$.

b) Qua M (−1, 0).

BT2. Lập các phương trình tiếp tuyến chung của (E) : $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{6} = 1$

và (P) : $y^2 = 12x$.

BT3. Cho (P) : $y = x^2$ và 2 điểm A, B di động trên (P) sao cho AB = 2.

a) Tìm quỹ tích trung điểm của đoạn AB.

b) Xác định vị trí của A, B sao cho diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi (P) và cát tuyến AB đạt giá trị lớn nhất.

BT4. Cho (P) : $y^2 = 2px$ và đường thẳng (D) di động cắt (P) tại M và N; cắt Ox tại I.

a) Chứng minh : $x_I^2 = x_M.x_N$.

b) Chứng minh nếu ΔOMN vuông tại O thì $x_M.x_N = 4p^2$ và (D) qua 1 điểm cố định.

BT5. Cho parabol (P) có đỉnh tại gốc tọa độ và đi qua $A\left(1,\ 2\sqrt{2}\right)$. Đường thẳng (d) đi qua $I\left(\frac{5}{2},\ 1\right)$ cắt (P) tại 2 điểm M, N sao cho MI = IN. Tính độ dài MN.

BT6. Cho (P): $y^2 = 2x$. Gọi F là tiêu điểm của (P). Gọi $M\left(\frac{t^2}{2},\ t\right)$ $(t \neq 0)$ và N là giao điểm của FM với (P) $(N \neq M)$.

a) Tìm tọa độ trung điểm I của MN.

b) Tìm quỹ tích của I khi t thay đổi $(t \neq 0)$.

BT7. Cho parabol (P) : $y^2 = 64x$ và (Δ) : $4x - 3y + 46 = 0$.

Viết phương trình đường tròn có tâm nằm trên (Δ) tiếp xúc (P) và có bán kính nhỏ nhất.

12 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

$\boxed{1}$ Parabol có đỉnh là O và Δ : x = 4 là đường chuẩn thì phương trình (P) là :

a) $y^2 = -16x$ b) $y = 16x$ c) $x^2 = 8y$ d) $x^2 = -8y$.

$\boxed{2}$ Cho (P) : $x^2 = 4y$. Kết luận nào sau đây là đúng :

a) (P) có tâm sai e = –1. b) Tiêu điểm F(1, 0).

c) Đường chuẩn (Δ) : x = –1. d) Tham số tiêu p = 2.

$\boxed{3}$ Phương trình chính tắc (P) qua A(2, –2) là :

a) $x^2 = -2y$ b) $y^2 = 2x$

c) Hai kết quả a, b đều đúng. d) Hai kết quả a, b đều sai.

4 Phương trình (P) có đỉnh O, trục Ox và khoảng cách từ đỉnh đến tiêu điểm là 3 :

a) $y = 12x$ b) $y = -12x$

c) Hai kết quả a, b đều đúng. d) Hai kết quả a, b đều sai.

5 Cho (P) : $y^2 = 2x$ và $M \in (P)$ có $x_M = 2$. Gọi F là tiêu điểm của (P) thì MF bằng :

a) 2 b) $\frac{3}{2}$ c) 1 d) $\frac{1}{2}$.

6 Cho (P) : $y^2 = 4x$. Cho $M \in (P)$ và MF = 2 với F là tiêu điểm của (P) thì hoành độ M là :

a) $1 = x_M$ b) $-3 = x_M$

c) Hai kết quả a, b đều đúng. d) Hai kết quả a, b đều sai.

7 Cho (P) : $x^2 = 2y$ và (D) : $2mx - 2y + 1 = 0$. Kết luận nào sau đây là đúng :

a) Tiêu điểm $F\left(0, \frac{1}{2}\right)$. b) (D) luôn qua F.

c) (D) luôn cắt (P) tại 2 điểm. d) Các kết luận a, b, c đều đúng.

8 Giao điểm của (P) : $y^2 = 4x$ và (d) : $2x - y - 4 = 0$ là :

a) A(4, −4) và B(1, −2) b) A(4, 4) và B(1, 2)

c) A(−4, 4) và B(1, −2) d) A(4, 4) và B(1, −2).

9 Tiếp tuyến của (P) : $y^2 = 8x$ mà song song (d) : $y = 2x$ là :

a) $2x - y + 1 = 0$ b) $2x + y + 1 = 0$

c) $2x - y - 1 = 0$ d) $2x - y = 0$.

10 Phương trình tiếp tuyến của (P) : $x^2 + 2y = 0$ mà có hệ số góc k = 2 là :

a) $x - 2y + 2 = 0$ b) $x + 2y - 2 = 0$

c) $2x - y + 2 = 0$ d) $2x - y - 2 = 0$.

11 Cho (P) : $y^2 = 4x$. Từ I(−1, 2) vẽ hai tiếp tuyến IA, IB đến (P) với A, B là tiếp điểm thì phương trình AB là :

a) $x - y + 1 = 0$ b) $x - y - 1 = 0$

c) $x + y + 1 = 0$ d) $x + y - 1 = 0$.

12 Cho điểm A cố định và đường thẳng (Δ) cố định không qua A. Tập hợp tâm M của các đường tròn qua A và tiếp xúc (Δ) là :

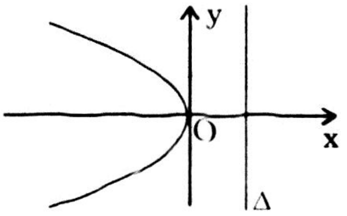
a) Đường tròn b) Elip c) Hyperbol d) Parabol.

TRẢ LỜI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

$\boxed{1}$ Do $x = 4$ là đường chuẩn nên (P) dạng : $y^2 = -2px$.

Mà $(\Delta) : x = 4 = \frac{p}{2} \quad \Rightarrow \quad p = 8$

Vậy pt (P) : $y = -16x$. Chọn a.

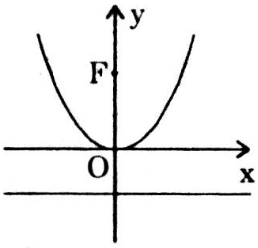


$\boxed{2}$ $x^2 = 4y = 2py$ (P) dạng

Tiêu điểm $F(0, 1)$; $(\Delta) : y = -1$

Các kết luận a, b, c đều sai.

Chọn d.



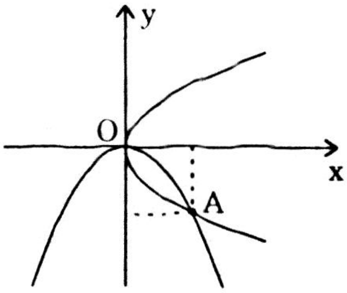
$\boxed{3}$ Phương trình (P) có dạng :

$$x^2 = -2py \quad \text{hay} \quad y^2 = +2px.$$

$A(2, -2) \in (P) \quad \Rightarrow \quad 4 = 4p \vee 4 = +4p$

$\Rightarrow \quad p = 1$

Vậy phương trình (P) : $x^2 = -2y$ hay $y^2 = 2x$. Chọn c.



$\boxed{4}$ Phương trình (D) có dạng : $y = \pm 2px$.

Do $OF = \frac{p}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad p = 6$

Phương trình (P) : $y = \pm 12x$. Chọn c.

$\boxed{5}$ $y^2 = 2x = 2px \quad \Rightarrow \quad p = 1$

$r = MF = x_M + \frac{p}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Chọn b.

$\boxed{6}$ $y^2 = 4x \quad \Rightarrow \quad p = 2$ và đường chuẩn $x = -\frac{p}{2} = -1 : (\Delta)$

Do định nghĩa (P) : $M \in (P) \quad \Leftrightarrow \quad MF = \delta(M, \Delta) \quad \Leftrightarrow \quad 2 = |x_M + 1|$

$\Leftrightarrow \quad x_M = 1 \vee x_M = -3$ (loại do $x_M > 0$)

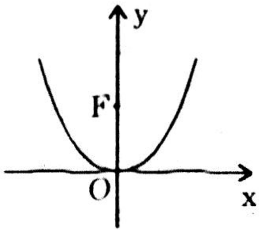
Chọn a.

$\boxed{7}$ $x^2 = 2y \quad \Rightarrow \quad p = 1$

Tiêu điểm $F\left(0; \frac{p}{2}\right) = \left(0; \frac{1}{2}\right)$. → a đúng.

$F\left(0; \frac{1}{2}\right) \in (D)$ vì $2m(0) - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$. → b đúng.

Không cần kiểm tra c, chọn d.



8 Xét hệ : $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-4)^2 = 4x \\ y = 2x - 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 20x + 16 = 0 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}.$$ Chọn d.

9 Tiếp tuyến // (D) nên có dạng : $2x - y + C = 0$

Do điều kiện tiếp xúc : $B^2p = 2AC \Rightarrow 1(4) = 2(2)C$

$\Rightarrow C = 1$

Phương trình tiếp tuyến : $2x - y + 1 = 0$. Chọn a.

10 *Cách 1* : Tiếp tuyến có $k = 2$ nên có dạng :

$$y = 2x + m \Leftrightarrow 2x - y + m = 0$$

Phương trình (P) : $x^2 = -2y \Rightarrow p = 1$

Do điều kiện tiếp xúc : $A^2p = -2Bc \Rightarrow 4(1) = -2(-1)m$

$\Rightarrow m = 2$

Cách 2 : Phương trình hoành độ giao điểm (d), (P) :

$$x^2 = 2(2x + m) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2m = 0$$

(d) tiếp xúc (P) $\Leftrightarrow \Delta' = 4 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 2$. Chọn c.

11 Gọi $A(x_1, y_1)$ thì phương trình tiếp tuyến của (P) tại A : $yy_A = 2(x + x_A)$

$I(-1, 2) \in$ tiếp tuyến $\Rightarrow 2y_A = 2(-1 + x_A)$ (1)

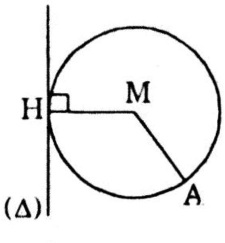
Tương tự $B(x_2, y_2) \Rightarrow y_B = -1 + x_B$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ phương trình (AB) : $x - y - 1 = 0$. Chọn b.

12 (M) tiếp xúc (Δ) $\Leftrightarrow \delta(M, \Delta) = R = MA$

Vậy quỹ tích M là (P).

Chọn d.



Phần 2

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1 PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

1. *Cho* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *và* $k \in R$ *thì :*

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$;

  $k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$

  $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \; ; \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

  $\vec{a}$ *cùng phương* $\vec{b} \Leftrightarrow a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$

- *Tích vô hướng 2 vectơ :*

$$\vec{a} . \vec{b} \overset{dn}{=} |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} . \vec{b} \overset{dl}{=} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

  + *Hệ quả :*

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} . \vec{b} = 0; \quad |\vec{a}|^2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} . \vec{b}}{|\vec{a}| . |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} . \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

- *Tích hữu hướng của 2 vectơ :*

  Cho $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

  thì $[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$

  + *Tính chất :* . $[\vec{a}, \vec{b}]$ **vuông góc** $\vec{a}$ **và** $\vec{b}$

  . $\vec{a}$ *cùng phương* $\vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$

  . $|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b})$

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *đồng phẳng* ⇔ $[\vec{a}, \vec{b}]\,\vec{c} = 0$

  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *không đồng phẳng* ⇔ $[\vec{a}, \vec{b}]\,\vec{c} \neq 0$

2. *Cho* $A(x_A, y_A, z_A)$; $B(x_B, y_B, z_B)$ *thì :*

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A)$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

* *M chia đoạn AB theo tỷ số* $k \neq 1$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MA} = k\,\overrightarrow{MB} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \\ z_M = \dfrac{z_A - kz_B}{1-k} \end{cases}$$

* *M trung điểm AB* $\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$

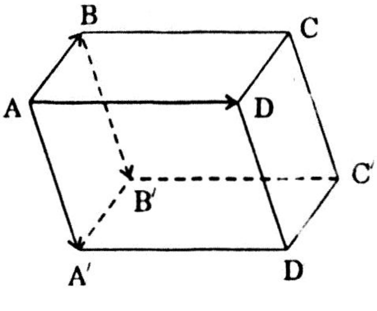
3. *Diện tích* ΔABC *là :* $S_{(\Delta ABC)} = \dfrac{1}{2}\left\| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \right\|$

4. *Nếu ABCD là tứ diện thì có thể tích là :*

$$V = \frac{1}{6}\left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \overrightarrow{AD} \right|$$

5. *Nếu ABCD.A'B'C'D' là hình hộp thì có thể tích là :*

$$V = \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right] \overrightarrow{AA'} \right|.$$



BÀI TẬP

Tất cả các bài toán ở phần 2 đều cho trên không gian Oxyz

Bài 1. Cho A(1, 2, –1); B(2, –1, 3); C(–4, 7, 5).

a) Chứng minh A, B, C không thẳng hàng.

b) Tính diện tích ΔABC. Suy ra độ dài đường cao hạ từ A.

c) Tính độ dài phân giác trong vẽ từ B.

GIẢI

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1, -3, 4)$; $\overrightarrow{BC} = (-6, 8, 2)$; $\overrightarrow{AC} = (-5, 5, 6)$

$$\Rightarrow \quad [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-38, -26, -1) \neq \vec{0}$$

Vậy $\overrightarrow{AB}$ không cùng phương $\overrightarrow{AC}$ nên A, B, C không thẳng hàng.

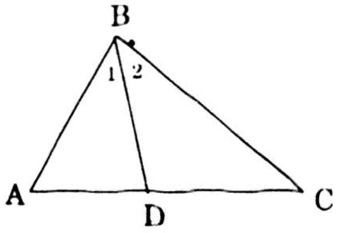
b) Ta có $S = S_{(\Delta ABC)} = \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{38^2 + 26^2 + 10^2} = \sqrt{554}$

Mà $S = S_{(\Delta ABC)} = \frac{1}{2}AH.BC$

$$\Rightarrow \quad AH = \frac{2S}{BC} = \frac{2\sqrt{554}}{\sqrt{104}} = \frac{\sqrt{554}}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{277}}{\sqrt{13}}.$$

c) Gọi D là chân đường phân giác trong vẽ từ B, ta có :

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{104}} = \frac{1}{2}$$



Mà D nằm giữa A và C nên :

$$\overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \quad \Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(1 - x_D) = x_D + 4 \\ 2(2 - y_D) = y_D - 7 \\ 2(-1 - z_D) = z_D - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -\dfrac{2}{3} \\ y_D = \dfrac{11}{3} \\ z_D = 1 \end{cases} \quad \text{Vậy } D\left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, 1\right)$$

Do đó $BD = \dfrac{2\sqrt{74}}{3}$. ■

Ghi chú : *Chúng ta nên né tránh dùng công thức điểm M chia đoạn AB theo tỷ số k vì thường xác định k sai, và mất công nhớ công thức.*

Bài 2. Cho 3 điểm A(a, 0, 0); B(0, b, 0); C(0, 0, c) với abc > 0.

1. Chứng tỏ ΔABC không thể là Δ vuông.

2. Tính thể tích hình chóp OABC và diện tích ΔABC theo a, b, c ?

GIẢI

1. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0)$ và $\overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$

Vậy $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = a^2 > 0$. Do đó $\widehat{BAC}$ là góc nhọn

Tương tự $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} > 0$, $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} > 0$

Vậy $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ là góc nhọn nên ΔABC không thể vuông.

2. Ta có $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (bc, ac, ba)$

Vậy $S_{(\Delta ABC)} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + b^2a^2}$

Ta có $\overrightarrow{AO} = (-a, 0, 0) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AO} = -abc$

Vậy $V_{OABC} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AO}\right| = \frac{abc}{6}$. ■

Bài 3. Cho tứ diện ABCD có A(2, 1, –1); B(3, 0, 1); C(2, –1, 3) và D nằm trên trục tung. Biết thể tích V của ABCD là 5. Tìm tọa độ D.

GIẢI

Gọi D(0, d, 0) ∈ y'Oy.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 2)$; $\overrightarrow{AD} = (-2, d - 1, 1)$; $\overrightarrow{AC} = (0, -2, 4)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0, -4, -2)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AD} = -4(d - 1) - 2 = -4d + 2$

Ta có : $V_{ABCD} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\left|-4d + 2\right| = 5$

$\Leftrightarrow -4d + 2 = \pm 30 \Leftrightarrow d = -7 \vee d = 8$

Do đó có 2 điểm D là (0, –7, 0) hay (0, 8, 0). ■

Bài 4. Cho A(2, –1, 6); B(–3, –1, –4); C(5, –1, 0); D(1, 2, 1).

a) Chứng minh ΔABC vuông. Tính bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.

b) Tính thể tích của tứ diện ABCD.

GIẢI

a) Ta có $\overrightarrow{BA} = (5, 0, 10)$; $\overrightarrow{CA} = (-3, 0, 6)$; $\overrightarrow{CB} = (-8, 0, -4)$

do $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 24 - 24 = 0$ nên ΔABC vuông tại C.

Vậy : $S = S_{(\Delta ABC)} = \frac{1}{2}CA.CB = \frac{1}{2}.3\sqrt{5}.4\sqrt{5} = 30$

Ta có $p = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) = \frac{1}{2}\left(5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}\right) = 6\sqrt{5}$

Mà S = pr nên bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC : $r = \frac{S}{p} = \frac{30}{6\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

b) Ta có $[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}] = (0, -60, 0)$; $\overrightarrow{DC} = (-4, 3, 1)$

Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}].\overrightarrow{DC}\right| = \frac{1}{6}\left|-180\right| = 30$ dvtt. ■

Bài 5. $A(-1, -2, 4)$; $B(-4, -2, 0)$; $C(3, -2, 1)$; $D(1, 1, 1)$.

Tính thể tích V của tứ diện ABCD và độ dài đường cao hạ từ D.

GIẢI

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3, 0, -4)$; $\overrightarrow{AD} = (2, 3, -3)$; $\overrightarrow{AC} = (4, 0, -3)$

$\Rightarrow$ $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0, -25, 0)$

Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AD}\right| = \frac{|-75|}{6} = \frac{25}{2}$

và $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \frac{25}{2}$

Do đó độ dài đường cao hạ từ D; $DH = \frac{3V}{S} = 3$. ■

Bài 6. Cho $\vec{v} \neq \vec{0}$. Gọi α, β, γ là 3 góc tạo bởi $\vec{v}$ và $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ là các vectơ đơn vị trên trục hoành, trục tung và trục cao. Chứng minh :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

GIẢI

Gọi $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ với $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \neq 0$

Ta có $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$; $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$; $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$

Do $\vec{v}.\vec{e}_1 = |\vec{v}|\,|\vec{e}_1|.\cos\alpha$ nên $v_1 = |\vec{v}|\cos\alpha$

$\vec{v}.\vec{e}_2 = |\vec{v}|\,|\vec{e}_2|.\cos\beta$ nên $v_2 = |\vec{v}|\cos\beta$

$\vec{v}.\vec{e}_3 = |\vec{v}|\,|\vec{e}_3|.\cos\gamma$ nên $v_3 = |\vec{v}|\cos\gamma$

Mà $|\vec{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$

$\Leftrightarrow$ $|\vec{v}|^2 = |\vec{v}|^2\cos^2\alpha + |\vec{v}|^2\cos^2\beta + |\vec{v}|^2\cos^2\gamma$

$\Leftrightarrow$ $1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$. ■

Bài 7. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BB'.

a) Chứng minh MN ⊥ A'C **b)** Tính cosin góc tạo bởi $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AC'}$.

GIẢI

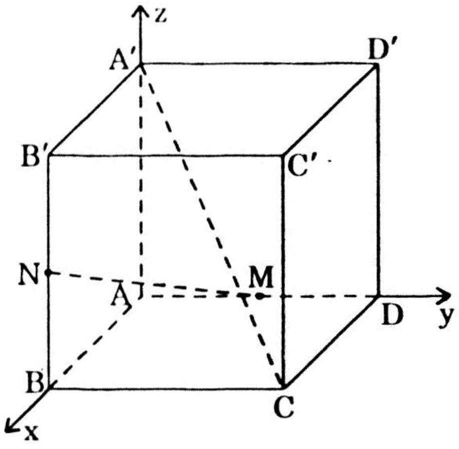
Thiết lập hệ trục tọa độ như hình vẽ. Gọi a là cạnh hình vuông.

Ta có $B(a, 0, 0)$ và $B'(a, 0, a)$

Vậy $N\left(a, 0, \frac{a}{2}\right)$

Ta có $A(0, 0, 0)$ và $D(0, a, 0)$

Vậy $M\left(0, \frac{a}{2}, 0\right)$



a) Ta có $A'(0, 0, a)$ và $C(a, a, 0)$ nên

$\overrightarrow{A'C} = (a, a, -a)$

và $\overrightarrow{MN} = \left(a, -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$

Vậy $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{A'C} = a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow MN \perp A'C$

b) Ta có $C'(a, a, a)$ nên $\overrightarrow{AC'} = (a, a, a)$

$$\cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC'}) = \frac{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC'}}{MN.AC'} = \frac{a^2 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}}{\sqrt{\frac{3a^2}{2}}.\sqrt{3a^2}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3a^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$ ■

Ghi chú : *Chúng ta cần quan tâm đến dạng toán phải gắn trong tọa độ và xác định đúng tọa độ các đỉnh của các khối đa diện quen thuộc, điều này sẽ gặp trong các đề thi tuyển sinh hiện nay.*

Bài 8. *Đề tự chọn phân ban tuyển sinh A 2007*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P là trung điểm SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc BP và tính thể tích khối đa diện CMNP.

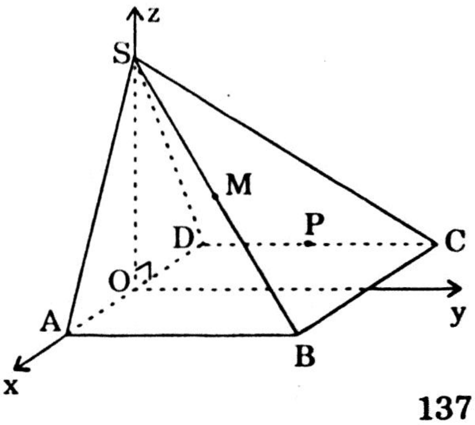
GIẢI

Gọi O là trung điểm AD.

ΔSAD đều nên $SO \perp AD$.

Mà mp (SAD) vuông góc mp (ABCD) nên $SO \perp$ mp (ABCD).

Gắn trục tọa độ như hình vẽ thì



$A\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$; $D\left(-\frac{a}{2}, 0, 0\right)$; $B\left(\frac{a}{2}, a, 0\right)$; $C\left(-\frac{a}{2}, a, 0\right)$; $S\left(0, 0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

a) Ta có : $\overrightarrow{AM} = \left(-\frac{a}{4}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$; $\quad \overrightarrow{BP} = \left(-a, -\frac{a}{2}, 0\right)$

Do $\quad \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BP} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + 0 = 0$ nên AM ⊥ BP.

b) Ta có : $\overrightarrow{CN} = \left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$; $\quad \overrightarrow{CP} = \left(0, -\frac{a}{2}, 0\right)$

$\Rightarrow \quad [\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CP}] = \left(0, 0, -\frac{a^2}{4}\right)$ và $\overrightarrow{CM} = \left(\frac{3a}{4}, -\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$

Vậy $\quad V_{CMNP} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CP}]\overrightarrow{CM}\right| = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}$. ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. Cho A(–3, –2, 6); B(–2, 4, 4). O là gốc tọa độ.

a) Chứng minh O, A, B là 3 đỉnh của 1 tam giác.

b) Tính diện tích ΔOAB và độ dài đường cao hạ từ O.

c) Tìm chân đường phân giác trong vẽ từ O của ΔOAB.

BT2. Cho A(0, 0, 3); B(1, 1, 5); C(–3, 0, 0); D(0, –3, 0).

a) Chứng minh A, B, C, D là 4 đỉnh của tứ giác.

b) Tính diện tích ΔACD và các góc của Δ này.

c) Tính $(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}^2.\overrightarrow{BC}$.

BT3. A(1, 2, –1); B(2, –1, 2); C(–4, 7, 5).

Tính độ dài phân giác trong kẻ từ B.

BT4. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' với : A(1, 0, 1); B(2, 1, 2); D(1, –1, 1); C'(4, 5, –5).

a) Tìm tọa độ các đỉnh còn lại.

b) Tính thể tích của hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

BT5. Cho 4 điểm A(1, 0, 0); B(0, 1, 0); C(0, 0, 1); D(–2, 1, –1).

a) Chứng minh ABCD là tứ diện.

b) Tính các góc tạo bởi các cặp cạnh đối diện của tứ diện ABCD.

c) Tính thể tích tứ diện ABCD và độ dài đường cao hạ từ A.

BT6. Cho 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đôi một không cùng phương. Chứng minh điều kiện cần và đủ để $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ là : $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$.

BT7. Cho A(0, 1, 0); B(2, 3, 1); C(−2, 2, 2); D(1, −1, 2).

a) Chứng minh ABCD là tứ diện có 3 mặt vuông.

b) Tính thể tích tứ diện ABCD và độ dài đường cao hạ từ A.

c) Gọi G là trọng tâm ΔABC. Chứng minh AG vuông góc mp (BCD).

BT8. Chứng minh :

a) $[\vec{a} . \vec{b}] = -[\vec{b} . \vec{a}]$

b) $[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \lambda\vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}] \quad \forall\lambda \in R$

c) $[\vec{c}, \vec{a} + \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{a}] + [\vec{c}, \vec{b}]$.

BT9. *Dự bị khối D 2003*

Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc mp (ABC), ΔABC vuông tại B. BA = a, BC = SA = 2a. Gọi M là trung điểm SC. Chứng minh ΔAMB cân tại M. Tính diện tích ΔAMB.

25 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

A. • ***Cho*** $\vec{a} = (-1, 1, 0); \vec{b} = (1, 1, 0); \vec{c} = (1, 1, 1)$.

Hãy trả lời các câu 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$\boxed{1}$ Mệnh đề nào sau đây là sai :

a) $\vec{a}$ vuông góc $\vec{b}$

b) $\vec{b}.\vec{c} = 2$

c) $\vec{b}$ không cùng phương $\vec{c}$

d) $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.

$\boxed{2}$ Mệnh đềnào sau đây là đúng :

a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

b) $[\vec{b}, \vec{c}] = (1; 1; 0)$

c) $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = (0; 2; -1)$

d) $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = -\frac{2}{3}$.

$\boxed{3}$ Kết luận sau đây là sai :

a $|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$

b) $|\vec{a} + \vec{b}| \ge ||\vec{a}| - |\vec{b}||$

c $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

d) $|\vec{a} + \vec{b}| \ne 0$.

$\boxed{4}$ Cosin góc tạo bởi $\vec{b}$ và $\vec{c}$ bằng :

a) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ d) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

$\boxed{5}$ Kết luận nào sau đây là đúng :

a) $\vec{a}\,[\vec{b}, \vec{c}] = 2$ b) $[\vec{a}, \vec{b}]\,\vec{c} = 2$

c) $[\vec{b}, \vec{c}]\,\vec{a} = -2$ d) $[\vec{a}, \vec{c}]\,\vec{b} = -2$.

$\boxed{6}$ Cho OABC là hình bình hành với $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ thì diện tích tứ giác OABC bằng :

a) 2 b) $\sqrt{2}$ c) 1 d) 4.

$\boxed{7}$ Cho $\vec{m} = (1, 0, -1)$; $\vec{n} = (0, 1, 1)$. Kết luận nào sai :

a) $\vec{m}$ và $\vec{n}$ không cùng phương b) $\vec{m}.\vec{n} = -1$

c) $[\vec{m}, \vec{n}] = (1, -1, 1)$ d) Góc của $\vec{m}$ và $\vec{n}$ là 60^0.

$\boxed{8}$ Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Kết luận nào sau đây là sai :

a) $[2\vec{a}, \vec{b}] = 2[\vec{a}, \vec{b}]$ b) $[\vec{a}, 3\vec{b}] = 3[\vec{a}, \vec{b}]$

c) $[2\vec{a}, 2\vec{b}] = 2[\vec{a}, \vec{b}]$ d) $|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$.

$\boxed{9}$ Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ có độ dài là 1 và 2. Biết $(\vec{a}, \vec{b}) = -\dfrac{\pi}{3}$ Thì $|\vec{a} + \vec{b}|$ bằng :

a) 1 b) 2 c) $\dfrac{3}{2}$ d) $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$.

$\boxed{10}$ Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo nhau một góc $\dfrac{2\pi}{3}$. Biết $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ thì $|\vec{a} - \vec{b}|$ bằng :

a) 5 b) 7 c) 6 d) 4.

B. $\boxed{11}$ Cho A(0, 1, 1); B(−1, 0, 1); C(1, 1, 1). Kết luận nào sau đây là đúng :

a) A, B, C thẳng hàng b) $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0, 0, -1)$

c) Dt $(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}$ d) $AB \perp AC$.

$\boxed{12}$ Cho A(1, 0, 0); B(0, 0, 1); C(2, 1, 1) thì ABCD là hình bình hành khi :

a) D(1, 1, 2) b) D(3, 1, 0) c) D(−1, 1, 2) d) D(3, −1, 0).

13 Cho A(3, 1, 0); B(–2, 4, $\sqrt{2}$). Gọi M là điểm trên trục tung và cách đều A và B thì :

a) (2, 0, 0) b) (0, –2, 0) c) (0, 2, 0) d) (0, 0, 2).

14 Cho A(4, 2, –6); B(5, –3, 1); C(12, 4, 5); D(11, 9, –2) thì ABCD là hình :

a) Bình hành b) Thoi c) Chữ nhật d) Vuông.

15 Cho A(4, 2, 6); B(10, –2, 4); C(4, –4, 0); D(–2, 0, 2) thì tứ giác ABCD là hình :

a) Bình hành b) Thoi c) Chữ nhật d) Vuông.

16 Cho A(–1, 2, 3); B(0, 1, –3). Gọi M là điểm sao cho $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BA}$ thì :

a) M(3, 4, 9) b) M(–3, 4, 15)

c) M(1, 0, –9) d) M(–1, 0, 9).

- ***Cho A(1, 0, 0); B(0, 1, 0); C(0, 0, 1); D(1, 1, 0).***

  Hãy trả lời các câu 17, 18, 19, 20.

17 Mệnh đề nào sau đây là sai :

a) ABCD là tứ diện b) AB ⊥ CD

c) ΔABC có một góc tù d) ΔBCD vuông.

18 Thể tích của hình chóp C.OADB :

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 1.

19 Diện tích của ΔABC bằng :

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

d) Các kết quả a, b, c đều sai.

20 Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC bằng :

a) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ b) $\sqrt{6}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\sqrt{2}$.

21 Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A(0, 0, 0); B(1, 0, 0); D(0, 1, 0); A'(0, 0, 2) thì thể tích V của tứ diện ABA'C' bằng :

a) V = 1 b) $V = \frac{2}{3}$ c) $V = \frac{1}{3}$ d) $V = \frac{1}{6}$.

22 ABCD là tứ diện khi và chỉ khi :

a) B không nằm trên mặt phẳng (ACD).

b) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ không đồng phẳng.

c) $[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}]\overrightarrow{BC} \neq \vec{0}$.

d) Ba kết quả a, b, c cùng đúng.

23 H là chân đường cao hạ từ A trong tứ diện ABCD khi và chỉ khi :

a) $\overrightarrow{AH}$ vuông góc $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{AH}$ vuông góc $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AH} = 0$.

c) Hai kết quả a, b đều đúng.

d) Hai kết quả a, b đều sai.

24 Trong không gian, I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC khi và chỉ khi :

a) $IA = IB = IC$

b) $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IC}$

c) $\begin{cases} |\overrightarrow{IA}| = |\overrightarrow{IB}| = |\overrightarrow{IC}| \\ [\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}]\overrightarrow{IC} = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} IA = IB = IC \\ IA \perp IB \perp IC \end{cases}$

25 H là trực tâm ΔABC trong không gian khi và chỉ khi :

a) $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$ và $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AH} = 0$.

c) Hai kết quả a, b cùng đúng.

d) Hai kết quả a, b cùng sai.

TRẢ LỜI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Ta có : $\vec{a} = (-1, 1, 0)$; $\vec{b} = (1, 1, 0)$

$\Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = (0, 0, -2) \neq \vec{0}$ → d sai.

2 Ta có $\vec{a} = (-1, 1, 0)$; $2\vec{b} = (2, 2, 0)$; $-\vec{c} = (-1, -1, -1)$

$\Rightarrow \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = (0, 2, -1)$ → c đúng.

Dĩ nhiên a sai.

$[\vec{b}, \vec{c}] = (1, -1, 0)$ → b sai

$$\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}|\,|\vec{c}|} = \frac{1+1}{\sqrt{2}.\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \rightarrow \text{d sai}$$

3 a, b dĩ nhiên đúng (bất đẳng thức trong Δ)

$\vec{a} + \vec{b} = (0, 2, 0) \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = 2 \neq 0$ → d đúng.

Ta có $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = -2 \neq 0$.

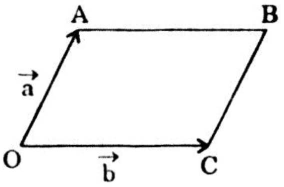
Vậy $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. → c sai.

$\boxed{4}$ $\vec{b} = (1, 1, 0)$; $\vec{c} = (1, 1, 1)$

$$\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\vec{b}.\vec{c}}{|\vec{b}|\,|\vec{c}|} = \frac{+1+1}{\sqrt{2}.\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.\ \text{Chọn b.}$$

$\boxed{5}$ Ta có $[\vec{b}, \vec{c}] = (1, -1, 0) \Rightarrow \vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] = -1 - 1 = -2$. **Chọn c.**

$\boxed{6}$ $[\vec{a}, \vec{b}] = (0, 0, -2)$



$\text{Dt(OABC)} = 2\text{Dt}(\Delta\text{OAC}) = \left|[\vec{a}, \vec{b}]\right| = 2.$

Chọn a.

$\boxed{7}$ $[\vec{m}, \vec{n}] = (1, -1, 1) \neq \vec{0}$. Vậy a, c đúng.

Dễ dàng thấy b đúng.

$$\cos(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{-1}{2} \Rightarrow (\vec{m}, \vec{n}) = 120^0 \rightarrow \text{d sai.}$$

$\boxed{8}$ Dễ dàng thấy a, b, d đúng $\Rightarrow$ c sai. Vì $[2\vec{a}, 2\vec{b}] = 4[\vec{a}, \vec{b}]$.

$\boxed{9}$ $$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} = 1 + 4 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$= 5 + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \rightarrow \text{Chọn d.}$$

$\boxed{10}$ $$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$= 9 + 25 - 2(3)(5)\left(-\frac{1}{2}\right) = 49.\ \text{Chọn b.}$$

$\boxed{11}$ $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 0)$; $\overrightarrow{AC} = (1, 0, 0)$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}] = (0, 0, 1) \neq \vec{0}.$$

Vậy a sai, b sai.

$$\text{Dt}(\Delta\text{ABC}) = \frac{1}{2}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \frac{1}{2} \rightarrow \text{c đúng.}$$

12 ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} -1 = 2 - x_D \\ 0 = 1 - y_D \\ 1 = 1 - z_D \end{cases}$

Vậy D(3, 1, 0). Chọn b.

13 M(0, m, 0) $\in$ y'Oy, A(3, 1, 0); B(–2, 4, $\sqrt{2}$)

$$MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow 9 + (m-1)^2 = 4 + (m-4)^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 10 = m^2 - 8m + 22$$

$$\Leftrightarrow 6m = 12.$$ Chọn c.

14 Ta có $\overrightarrow{AB} = (1, -5, 7) = \overrightarrow{DC}$ $\Rightarrow$ ABCD là hình bình hành.

Ta có $\overrightarrow{AD} = (7, 7, 4)$

Ta thấy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 7 - 35 + 28 = 0$ và AB $\neq$ AD.

Vậy ABCD là hình chữ nhật. Chọn c.

15 $\overrightarrow{AB} = (6, -4, -2) = \overrightarrow{DC}$ $\Rightarrow$ ABCD là hình bình hành

$\overrightarrow{AD} = (-6, -2, -4)$

Do $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = -36 + 8 + 8 \neq 0$ nên ABCD không là hình chữ nhật.

Mà AB = AD nên ABCD là hình thoi. Chọn b.

16 A(–1, 2, 3); B(0, 1, –3)

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 2(-1) \\ y - 2 = 2(+1) \\ z - 3 = 2(+6) \end{cases}$$

Vậy M(–3, 4, 15). Chọn b.

17 ABCD tứ diện → a đúng

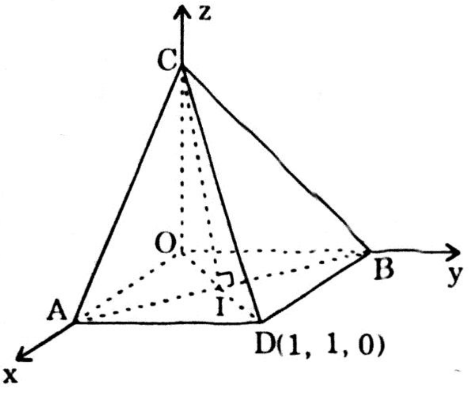
$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0) \perp \overrightarrow{CD} = (1, 1, -1)$ → b đúng

ΔBCD $\perp$ tại B (định lí 3 đường vuông góc) → d đúng

a, b, d đều đúng thì dĩ nhiên c sai.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{CA} = (+1, 0, -1) \\ \overrightarrow{CB} = (0, 1, -1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 1 > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1 > 0$$



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BA} = (1, -1, 0)\\ \overrightarrow{BC} = (0, -1, 1)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} > 0$$

Vậy ΔABC có 3 góc nhọn → c sai.

18 $V_{COADB} = \frac{1}{3}.OC.Dt\,(OADB) = \frac{1}{3}$. Chọn b.

19 Gọi I là trung điểm AB thì $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

$$Dt\,(\Delta ABC) = \frac{1}{2}CI.AB = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Cách khác : $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1, 1, 1)$

$Dt\,(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Chọn a.

20 $S = Dt\,(\Delta ABC) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$p = \frac{1}{2}(AB + AC + AB) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Chọn a.

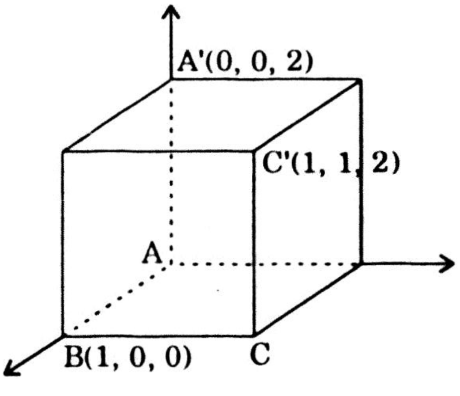
21 $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0)$

$\overrightarrow{AA'} = (0, 0, 2)$

$\overrightarrow{AC'} = (1, 1, 2)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'}] = (0, -2, 1)$

$\Rightarrow V = \frac{1}{6}|2| = \frac{1}{3}$



Chọn c.

22 Chọn d.

23 Do AH ⊥ mp (ABC) và H ∈ mp (ABC). Chọn b.

24 I phải cách đều A, B, C và I ∈ mp (ABC). Chọn c.

25 AH ⊥ BC, BH ⊥ AC mà H ∈ mp (ABC). Chọn b.

Bài 2

MẶT PHẲNG

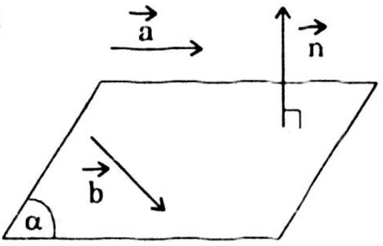
1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

a) Định nghĩa :

Cặp vectơ $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ *gọi là cặp vectơ chỉ phương của mp* (α) *nếu* $\vec{a}$ *không* **cùng phương** $\vec{b}$ **và** *giá của chúng song song hoặc nằm trên mp* (α).

Định nghĩa : $\vec{n} \neq \vec{0}$ *gọi là vectơ pháp tuyến của* **mp** (α) **nếu giá của nó** *vuông góc với mp* (α).

Chú ý : Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ *là cặp vectơ chỉ phương của* (α) **thì vectơ pháp tuyến** $\vec{n} = k[\vec{a}, \vec{b}]$, $k \in R$.



b) Định lý : Phương trình tổng quát của mặt

phẳng có dạng : $Ax + By + Cz + D = 0$ $(\text{với } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

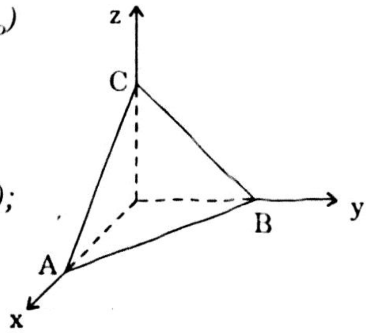
trong đó $\vec{n} = (A, B, C)$ *là pháp vectơ của mặt phẳng.*

Hệ quả : Phương trình *mặt phẳng qua* $M(x_o, y_o, z_o)$ **và có pháp vectơ** $\vec{n} = (A, B, C)$ *là :*

$$\boxed{A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0}$$

Hệ quả : Phương trình *mặt phẳng qua* $A(a, 0, 0)$; $B(0, b, 0)$; $C(0, 0, c)$ **là :**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (abc \neq 0)$$



c) Định lý : Phương trình mặt phẳng qua giao tuyến của 2 mặt phẳng cắt

nhau : $Ax + By + Cz + D = 0$ *và* $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ *là :*

$$\boxed{\lambda(Ax + By + Cz + D) + \mu(A'x + B'y + C'z + D') = 0} \qquad \text{với } \lambda^2 + \mu^2 \neq 0$$

2. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẲNG

Cho $M(x_o, y_o, z_o)$ **và** $mp(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$ *thì :*

$$\delta(M, \alpha) = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

3. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Cho mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$ *và* $(\beta) : A'x + B'y + C'z + D' = 0$

lần lượt có pháp vectơ $\vec{n}_\alpha = (A, B, C)$ *và* $\vec{m}_\beta = (A', B', C')$.

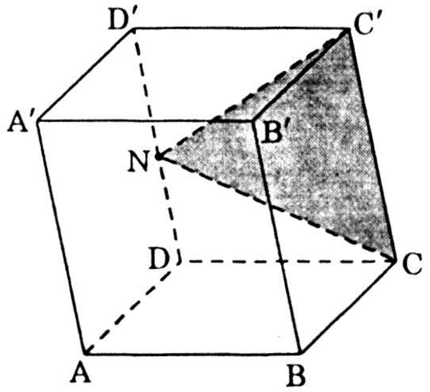
Gọi φ **là góc giữa** (α) **và** (β) $(0 \leq \varphi \leq 90^o)$ *thì :*

$$\cos\varphi = |\cos(\vec{n}, \vec{m})| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|}$$

BÀI TẬP

Bài 1. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' với A(1, 0, 1); B(2, 1, 2); D(1, –1, 1); C'(4, 5, –5). Gọi N là trung điểm DD'. Viết phương trình mặt phẳng (NCC').

GIẢI



Ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \begin{cases} 0 = x_C - 2 \\ -1 = y_C - 1 \\ 0 = z_C - 2 \end{cases}$

Vậy C(2, 0, 2)

Ta có $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow \begin{cases} x_{D'} - 1 = 2 \\ y_{D'} + 1 = 5 \\ x_{D'} - 1 = -7 \end{cases}$

Vậy D'(3, 4, –6)

Do N là trung điểm DD' nên $N\left(2, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

Ta có $\overrightarrow{CN} = \left(0, \frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ và $\overrightarrow{CC'} = (2, 5, -7)$

Vậy $[\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CC'}] = (12, -9, -3) = 3(4, -3, -1)$

Mp(NCC') qua C(2, 0, 2) và có PVT (4, –3, –1)

Phương trình mp(NCC') : $4(x - 2) - 3y - 1(z - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4x - 3y - z - 6 = 0.$ ■

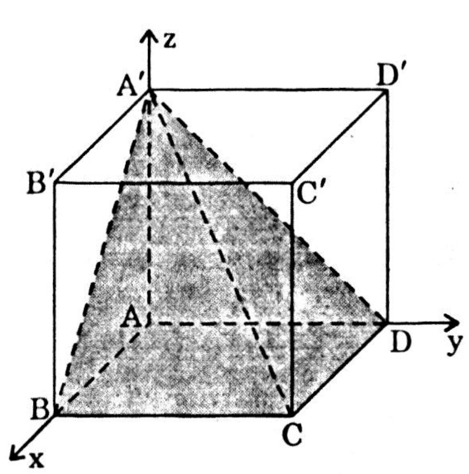
Bài 2. *Tuyển sinh Đại học khối A 2003.*

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tính số đo nhị diện (B, A'C, D).

GIẢI

Thiết lập hệ trục như hình vẽ.

Đặt a là cạnh của hình vuông.



Vậy : B(a, 0, 0); A'(0, 0, a);

C(a, a, 0); D(0, a, 0)

Ta có $\overrightarrow{BA'} = (-a, 0, a)$; $\overrightarrow{BC} = (0, a, 0)$

Vậy PVT của mp(BA'C) là :

$$\vec{n} = [\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC}] = (-a^2, 0, -a^2)$$
$$= -a^2(1, 0, 1)$$

Ta có $\overrightarrow{DA'} = (0, -a, a)$; $\overrightarrow{DC} = (a, 0, 0)$

Vậy PVT của mp(DA'C) là : $\vec{m} = [\overrightarrow{DA'}, \overrightarrow{DC}] = (0, a^2, a^2) = a^2(0, 1, 1)$

Gọi φ là góc của hai mp(BA'C) và (DA'C) thì :

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{m}.\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \qquad \text{Vậy } \varphi = 60^\circ. \ ■$$

Chú ý : φ là góc nhọn tạo bởi hai mp(BA'C) và (DA'C). Góc nhị diện (BA'C, DA'C) của bài này là 120°. Gắn hệ trục tọa độ với bài tìm góc phẳng nhị diện ta chưa trả lời chuẩn xác.

Bài 3. Cho A(5, 1, 3); B(1, 6, 2); C(5, 0, 4).

a) Viết phương trình mp (ABC). Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC).

b) Viết phương trình mặt phẳng qua O, A và song song BC.

c) Viết phương trình mặt phẳng qua C, A và vuông góc mặt phẳng

$$(\alpha) : x - 2y + 3z + 1 = 0.$$

Tính góc giữa mặt phẳng vừa tìm được và mặt phẳng (ABC).

d) Viết phương trình mặt phẳng qua O vuông góc (α) và vuông góc mp (ABC).

e) Viết phương trình mặt phẳng qua giao tuyến của 2 mặt phẳng (α), (ABC) và qua I(−1, 2, 3).

GIẢI

a) Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-4, 5, -1)$ và $\overrightarrow{AC} = (0, -1, 1)$

là hai vectơ chỉ phương của mp (ABC).

Vậy pháp vectơ là $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (4, 4, 4) = 4(1, 1, 1)$

Do đó phương trình mặt phẳng (ABC) : $1(x - 5) + 1(y - 1) + 1(z - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x + y + z - 9 = 0$$

Vậy : $\delta(O, mp(ABC)) = \dfrac{|-9|}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$.

b) Mặt phẳng qua O, A và song song BC có cặp vectơ chỉ phương là :

$$\overrightarrow{OA} = (5, 1, 3) \text{ và } \overrightarrow{BC} = (4, -6, 2)$$

Vậy pháp vectơ là $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC}] = (20, 2, -34) = 2(10, 1, -17)$

Phương trình mặt phẳng cần tìm (qua O) là : $10x + y - 17z = 0$.

c) Mặt phẳng cần tìm $\perp (\alpha) : x - 2y + 3z + 1 = 0$

vậy nhận $\vec{n}_\alpha = (1, -2, 3)$ là vectơ chỉ phương.

Vectơ chỉ phương khác là $\overrightarrow{AC} = (0, -1, 1)$

Vậy pháp vectơ $[\vec{n}_\alpha, \overrightarrow{AC}] = (1, -1, -1)$

Phương trình mặt phẳng cần tìm (qua O) là :

$$1(x - 5) - 1(y - 0) - 1(z - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - y - z - 1 = 0$$

Pháp vectơ của mặt phẳng (ABC) là $(1, 1, 1) = \vec{n}$

Pháp vectơ của mặt phẳng vừa tìm $(1, -1, -1) = \vec{n}'$

Gọi φ là góc của 2 mp này $(0 \le \varphi \le 90^0)$ thì :

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}.\vec{n}'\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{n}'\right|} = \frac{|1 - 1 - 1|}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

d) Mặt phẳng cần tìm vuông góc mp (ABC) và mp (α) nên nhận $\vec{n}$ và $\vec{n}'$ làm vectơ chỉ phương nên pháp vectơ là $[\vec{n}, \vec{n}'] = (0, 2, -2) = 2(0, 1, -1)$

Mặt phẳng này qua O nên có phương trình : $y - z = 0$.

e) Phương trình chùm mặt phẳng qua giao tuyến của 2 mặt phẳng (ABC) và (α) : $\lambda(x + y + z - 9) + \mu(x - 2y + 3z + 1) = 0 \quad (\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$

Mặt phẳng thuộc chùm qua I(–1, 2, 3) nên :

$$\lambda(-1 + 2 + 3 - 9) + \mu(-1 - 4 + 9 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -5\lambda + 5\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \mu$$

Chọn $\lambda = \mu = 1$ ta được phương trình mặt phẳng cần tìm :

$$2x - y + 4z - 8 = 0. \quad ■$$

Bài 4. Cho A(1, 1, 3); B(–1, 3, 2); C(–1, 2, 3).

a) Kiểm chứng 3 điểm A, B, C không thẳng hàng và viết phương trình mặt phẳng (P) chứa 3 điểm này. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (P).

b) Tính diện tích tam giác ABC và thể tích tứ diện OABC.

GIẢI

a) • Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, -1); \quad \overrightarrow{AC} = (-2, 1, 0)$

$$\Rightarrow \quad [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1, 2, 2)$$

Do $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \neq \overrightarrow{0}$ nên 3 điểm A, B, C không thẳng hàng.

- Mặt phẳng (ABC) qua A và có pháp vectơ là $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$

  Phương trình mp(ABC) : $1(x - 1) + 2(y - 1) + 2(z - 3) = 0$

  $\Leftrightarrow \quad x + 2y + 2z - 9 = 0$

  Ta có : $\delta(O, mp(ABC)) = \dfrac{|-9|}{\sqrt{9}} = 3$.

b) • Diện tích $(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{1 + 4 + 4} = \dfrac{3}{2}$

- Ta có : $\overrightarrow{AO} = (-1, -1, -3)$

  $\Rightarrow \quad [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AO} = -1 - 2 - 6 = -9$

  Vậy : $V_{OABC} = \dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AO}\right| = \dfrac{|-9|}{6} = \dfrac{3}{2}$. ■

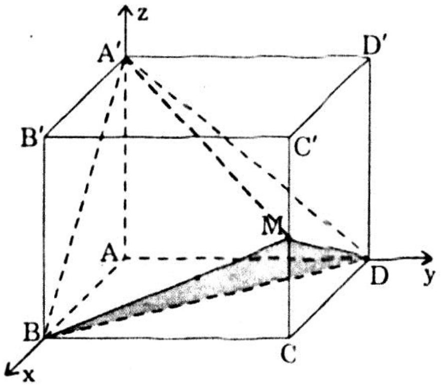
Bài 5. *Tuyển sinh ĐH khối A 2003.*

Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A(0, 0, 0); B(a, 0, 0); D(0, a, 0); A'(0, 0, b) với a, b > 0. Gọi M là trung điểm CC'.

a) Tính thể tích tứ diện BDA'M.

b) Tìm tỉ số $\dfrac{a}{b}$ để mặt phẳng (A'BD) vuông góc mặt phẳng (MBD).

GIẢI



Ta có $C(a, a, 0)$; $C'(a, a, b)$

Vậy $M\left(a, a, \dfrac{b}{2}\right)$

a) Ta có $\overrightarrow{BD} = (-a, a, 0)$; $\overrightarrow{BA'} = (-a, 0, b)$

$\Rightarrow \quad [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}] = (ab, ab, a^2)$

và $\overrightarrow{BM} = \left(0, a, \dfrac{b}{2}\right)$

Vậy $V_{BDA'M} = \dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}]\overrightarrow{BM}\right| = \dfrac{1}{6}\left|0 + a^2b + \dfrac{a^2b}{2}\right| = \dfrac{1}{4}a^2b$.

b) Mp(A'BD) có PVT $\vec{n} = [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}] = (ab, ab, a^2)$

Ta có $\overrightarrow{BD} = (-a, a, 0)$; $\overrightarrow{BM} = \left(0, a, \dfrac{b}{2}\right)$

Vậy mp(MDB) có PVT $\vec{m} = [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}] = \left(\frac{ab}{2}, \frac{ab}{2}, -a^2\right)$

Mp(MDB) vuông góc mp(A'BD) $\Leftrightarrow \quad \vec{m}.\vec{n} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{2} - a^4 = 0$$

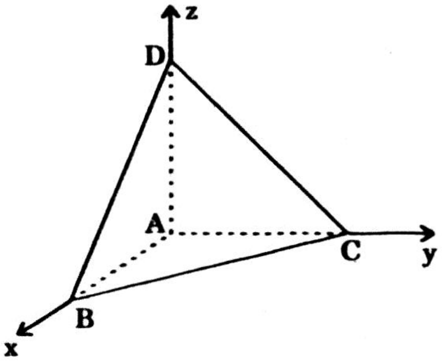
$$\Leftrightarrow \quad a^2b^2 = a^4 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = 1 \quad \text{(do a, b > 0)}$$ ■

Bài 6. *Tuyển sinh ĐH khối D 2002*

Cho tứ diện ABCD có AD vuông góc mp(ABC), **AC = AD = 4cm, AB = 3cm,** BC = 5cm. Tính khoảng cách tại A đến **mp(BCD).**

GIẢI



ΔABC vuông tại A vì $BC^2 = 25 = AB^2 + AC^2$

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ thì

A(0, 0, 0); B(3, 0, 0); C(0, 4, 0); D(0, 0, 4)

Phương trình mặt chắn (BCD) :

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x + 3y + 3z - 12 = 0$$

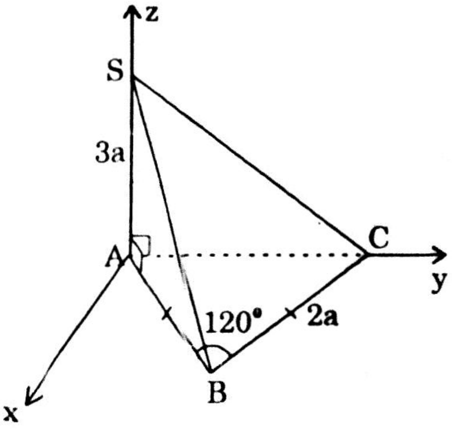
Vậy : $\delta(A, mp(BCD)) = \dfrac{|0 - 12|}{\sqrt{16 + 9 + 9}} = \dfrac{12}{\sqrt{34}}$. ■

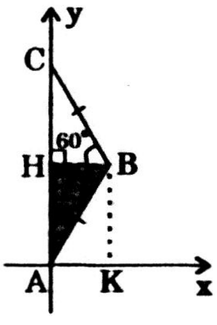
Bài 7. *Đề dự bị khối B 2004*

Cho hình chóp S.ABC có SA = 3a, SA vuông **góc mp(ABC), AB = BC = 2a,** $\widehat{ABC} = 120^0$. Tính khoảng cách từ A đến **mp(SBC).**

GIẢI

Gắn hệ trục như hình vẽ.





Δ vuông ABH có $AB = 2a$, $\widehat{ABH} = 60^0$

nên $\sin 60^0 = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AH = y_B = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$\cos 60^0 = \dfrac{BH}{AB} \Rightarrow BH = x_B = 2a.\left(\dfrac{1}{2}\right) = a$

Vậy $B(a, a\sqrt{3}, 0)$; $C(0, 2a\sqrt{3}, 0)$; $S(0, 0, 3a)$

Ta có $\overrightarrow{SB} = (a, a\sqrt{3}, -3a) = a(1, \sqrt{3}, -3)$

$\overrightarrow{SC} = (0, 2a\sqrt{3}, -3a) = a(0, 2\sqrt{3}, -3)$

$\Rightarrow$ PVT $\vec{n} = [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = a^2(3\sqrt{3}, 3, 2\sqrt{3}) = a^2\sqrt{3}(3, \sqrt{3}, 2)$

Phương trình mp (SBC) là : $3(x - 0) + \sqrt{3}(y - 0) + 2(z - 3a) = 0$

$\Leftrightarrow 3x + \sqrt{3}y + 2z - 6a = 0$

Vậy $\delta(A, mp(SBC)) = \dfrac{|0 - 6a|}{\sqrt{9 + 3 + 4}} = \dfrac{6a}{4} = \dfrac{3}{2}a$. ■

Bài 8. **a)** Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M(0, 0, 1); N(3, 0, 0) và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc 60^0.

b) $A(a, 0, 0)$; $B(0, b, 0)$; $C(0, 0, c)$ với a, b, c dương thay đổi mà $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm a, b, c sao cho khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABC) lớn nhất.

GIẢI

a) Gọi K(0, k, 0) là giao điểm mp(P) và y'Oy thì phương trình mp(P) :

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{k} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow kx + 3y + 3kz - 3k = 0$$

mp(P) có PVT $\vec{n} = (k, 3, 3k)$

mp(Oxy) có PVT $\vec{m} = (0, 0, 1)$

Ta có $\cos 60^0 = \dfrac{|\vec{n}.\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{|3k|}{\sqrt{10k^2 + 9}}$

$\Leftrightarrow 10k^2 + 9 = 36k^2 \Leftrightarrow k^2 = \dfrac{9}{26} \Leftrightarrow k = \pm\dfrac{3}{\sqrt{26}}$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) : $\pm\dfrac{3}{\sqrt{26}}x + 3y \pm \dfrac{9}{\sqrt{26}}z \mp \dfrac{9}{\sqrt{26}} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0 \\ -x + \sqrt{26}y - 3z + 3 = 0 \end{array}\right.$$

b) Phương trình mặt phẳng (ABC) là : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ với $a^2 + b^2 + c^2 = 3$

Ta có $d = \delta(O, mp(ABC)) = \dfrac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$

Do bất đẳng thức Cauchy : $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}$ (1)

và $3 = a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ (2)

Lấy (1) nhân (2) vế với vế, ta được :

$$3\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 9 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \geq \sqrt{3}$$

Vậy $d \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2} \\ a^2 = b^2 = c^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$

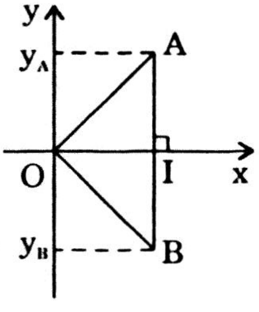
Do đó $d_{max} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ khi $a = b = c = 1$. ■

Bài 9. Trong không gian Oxyz. Xét ΔOAB đều trong mặt phẳng Oxy có cạnh a, đường thẳng AB song song trục tung. Điểm A nằm trên phần tư thứ nhất trong mặt phẳng Oxy. Cho $S\left(0, 0, \frac{a}{3}\right)$.

a) Xác định A, B và trung điểm E của OA. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa SE và song song trục hoành.

b) Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P). Suy ra khoảng cách của trục hoành và đường thẳng SE.

GIẢI



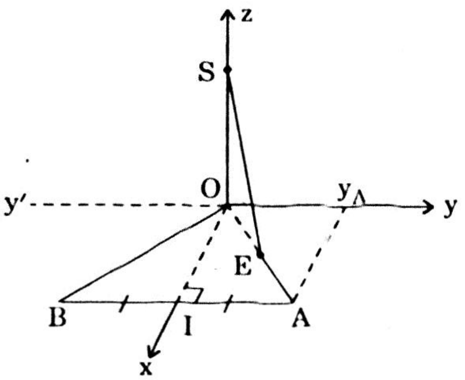
a) ΔOAB đều cạnh a nên đường cao $OI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Mà đường thẳng AB // y'Oy

$\Rightarrow x_A = x_B = OI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $y_A = -y_B = AI = \frac{a}{2}$

Vậy $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, 0\right)$; $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{a}{2}, 0\right)$

và $E\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}, \frac{a}{4}, 0\right)$.



Mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{SE} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}, \frac{a}{4}, -\frac{a}{3}\right)$

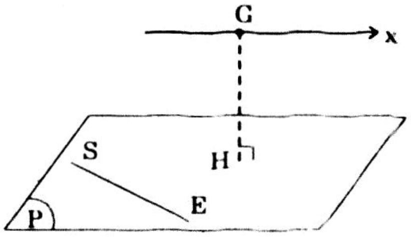
và $\vec{e_1} = (1, 0, 0)$ là vectơ chỉ phương.

$\Rightarrow$ Pháp vectơ $\vec{n} = [\overrightarrow{SE}, \vec{e_1}] = \left(0, -\frac{a}{3}, -\frac{a}{4}\right) = \frac{a}{12}(0, 4, 3)$

Phương trình mặt phẳng (P) là : $0(x - 0) + 4(y - 0) + 3\left(z - \frac{a}{3}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 4y + 3z - a = 0.$$

b) Do $\begin{cases} SE \subset mp(P) \\ Ox \,//\, mp(P) \end{cases}$



Do đó $\delta(Ox, SE) = \delta(O, P)$

$$= \frac{|-a|}{\sqrt{9+16}} = \frac{a}{5}. \blacksquare$$

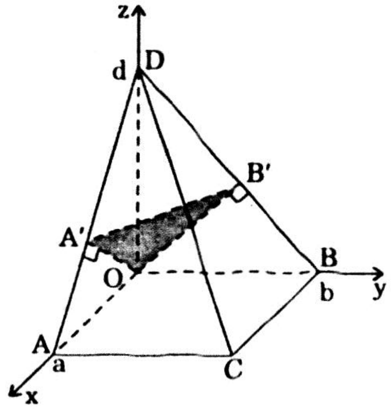
Bài 10. Trong không gian Oxyz cho A(a, 0, 0); B(0, a, 0); C(a, a, 0); D(0, 0, d) với a > 0, d > 0.

Gọi A', B' là hình chiếu vuông góc của O xuống 2 đường thẳng DA, DB.

a) Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng OA', OB'. Chứng minh rằng mặt phẳng đó vuông góc CD.

b) Tính d theo a để $\widehat{A'OB'} = 45^\circ$.

GIẢI



a) Ta có : $\overrightarrow{AD} = (-a, 0, d)$;

$\overrightarrow{AC} = (0, a, 0)$;

$\overrightarrow{BD} = (0, -a, d)$.

Ta có : AC $\perp$ mp (Oxz)

$\Rightarrow$ AC $\perp$ OA'

Mà OA' $\perp$ AD nên OA' $\perp$ mp(ADC)

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{OA'}$ cùng phương với $[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = (ad, 0, a^2) = a(d, 0, a)$

Tương tự $OA \perp mp(Oyz)$ nên $OB' \perp OA$ mà $OB' \perp DB$

Vậy $\overrightarrow{OB'} \mathbin{//} [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{DB}] = (0, ad, a^2) = a(0, d, a)$

Do đó mp(O, A', B') có cặp vectơ chỉ phương là (d, 0, a) và (0, d, a).

$\Rightarrow$ Pháp vectơ là $(-ad, -ad, d^2) = -d(a, a, -d)$

Phương trình mặt phẳng (O, A', B') là : $ax + ay - dz = 0$

Vectơ pháp tuyến của mp(OA'B') là : $\vec{n} = (a, a, -d) = \overrightarrow{DC}$

Do đó $CD \perp mp(OA'B')$.

b) $$\cos(\widehat{A'OB'}) = \left|\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)\right| = \frac{|\vec{n}_1 . \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| . |\vec{n}_2|} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{|a^2|}{\sqrt{d^2 + a^2} . \sqrt{d^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2a^2 = \sqrt{2}\,(a^2 + d^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\, a^2 = a^2 + d^2 \quad \Leftrightarrow \quad d^2 = (\sqrt{2} - 1)a^2 \quad \Leftrightarrow \quad d = \sqrt{\sqrt{2} - 1}\, a. \ \blacksquare$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. Viết phương trình mặt phẳng chứa gốc tọa độ và vuông góc 2 mặt phẳng $(P) : x - y + z - 7 = 0$ và $(Q) : 3x + 2y - 12z + 5 = 0$

BT2. *Dự bị khối B 2003*

Viết phương trình mặt phẳng qua I(0, 0, 1); K(3, 0, 0) và tạo với mặt phẳng Oxy một góc 30°.

BT3. Cho A(5, 1, 3); B(1, 6, 2); C(5, 0, 4); D(4, 0, 6)

và mặt phẳng $(\alpha) : x - 2y + z - 10 = 0$

a) Viết phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc BC.

b) Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

c) Gọi G là trọng tâm tứ diện, I là điểm cách đều 4 đỉnh của tứ diện. Viết phương trình mặt phẳng (BGI).

d) Viết phương trình mặt phẳng qua A, B và // CD.

e) Viết phương trình mặt phẳng qua C, D và vuông góc với mặt phẳng (α).

g) Viết phương trình mặt phẳng qua D, vuông góc 2 mặt phẳng (ABC) và (α).

h) Viết phương trình mặt phẳng qua giao tuyến của 2 mặt phẳng (ABC), (α) và :
+ qua D
+ vuông góc mặt phẳng $(\alpha) : 3x - y + 2z = 0$.

BT4. Viết phương trình mặt phẳng qua $I(1, 0, 2)$, song song $\vec{a} = (2, 3, 1)$ và vuông góc mặt phẳng $(\alpha) : 2x - y - 5z = 0$.

Tìm góc giữa mặt phẳng vừa tìm được và mặt phẳng (Oxy).

BT5. Chứng minh 4 mặt phẳng sau đây là 4 mặt bên của hình hộp chữ nhật.

$$7x + 4y - 4z + 30 = 0 \quad ; \quad 36x - 51y + 12z + 17 = 0$$

$$14x + 8y - 8z - 12 = 0 \quad ; \quad 12x - 17y + 4z - 3 = 0$$

BT6. Cho 2 mặt phẳng $(\alpha) : 2x - y + 3z + 1 = 0$,

$(\beta) : x + y - z + 5 = 0$ và $M(1, 0, 5)$.

a) Tính khoảng cách từ M đến (α).

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua giao tuyến của (α) và (β) đồng thời vuông góc mặt phẳng $(Q) : 3x - y + 1 = 0$.

BT7. Tìm trên trục tung các điểm cách đều 2 mặt phẳng :

$$x + y - z + 1 = 0 \quad \text{và} \quad x - y + z - 5 = 0.$$

BT8. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm A'D', D'C', C'C và AA'.

a) Chứng minh 4 điểm M, N, P, Q cùng nằm trên 1 mặt phẳng.

b) Tính chu vi và diện tích tứ giác MNPQ.

BT9. Tìm tập hợp các điểm trong không gian.

a) Cách đều 2 điểm $A(1, 2, -3)$; $B(4, 5, 0)$.

b) Cách đều 2 mặt phẳng song song :

$$x - 2y - z = 0 \quad \text{và} \quad 2x - 4y - 2z + 10 = 0.$$

c) Cách đều 2 mặt phẳng cắt nhau :

$$2x + 2y - z + 7 = 0 \quad \text{và} \quad 2x - 4y - 2z + 10 = 0.$$

BT10. Lập phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến của 2 mặt phẳng :

$$3x - 4y + z + 6 = 0; \quad 2x - 3y + z + 2 = 0$$

và cách đều 2 điểm $A(3, -4, -6)$; $B(1, 2, 2)$.

BT11. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Oz và lập với mặt phẳng $(\alpha) : 2x + y - \sqrt{5}z = 0$ một góc 60°.

BT12. Tìm m, n sao cho 2 mặt phẳng sau đây song song

$$3x - 5y + (m - 1)z - 3 = 0 \quad \text{và} \quad 2x + (n - 1)y - 3z + 1 = 0.$$

BT13. *Đề Dự bị khối A 2002*

Cho hình chóp S.ABC có đáy ΔABC đều cạnh a, $SA \perp mp(ABC)$ và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến mp(SBC).

30 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Phương trình mặt phẳng qua A(0, 0, 4); B(8, 0, 0); C(0, −2, 0) là :

a) $\frac{x}{8} - \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 0$ b) $2x + y - 4z - 8 = 0$

c) $2x + y + 4a - 8 = 0$ d) $x - 4y + 2z - 8 = 0$.

2 Cho A(1, 2, 3). Gọi I, H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên 3 trục tọa độ thì phương trình mặt phẳng (IHK) là :

a) $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 0$ b) $6x + 3y + 2z - 6 = 0$

c) $x + 2y + 3z = 0$ d) $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

3 Phương trình mặt phẳng qua A(1, −1, 1) và song song mp(Oyz) là :

a) $x - 1 = 0$ b) $x + 1 = 0$ c) $y + 1 = 0$ d) $z - 1 = 0$.

4 Cho mặt phẳng $x + 2y = 0$ (α). Kết luận nào sau đây là đúng :

a) (α) song song trục cao b) (α) chứa trục cao

c) (α) song song mp(Oxy) d) (α) chứa trục Oy.

5 Phương trình mp qua A(1, 2, 3) và song song mp : $x - 4y + z + 12 = 0$ là

a) $x - 4y + z + 4 = 0$ b) $x - 4y + z - 4 = 0$

c) $x - 4y + z - 12 = 0$ d) $x - 4y + z - 1 = 0$.

6 Phương trình mặt phẳng qua E(4, −1, 1); F(3, 1, −1) và // x'Ox là :

a) $x + y = 0$ b) $x + z = 0$ c) $y + z = 0$ d) $y + z - 1 = 0$.

7 Phương trình mặt phẳng chứa trục tung và qua A(1, 4, −3) là :

a) $3x + z + 1 = 0$ b) $3x + z = 0$

c) $3x + y = 0$ d) $3x - z = 0$.

- ***Cho A(2, 1, −1); B(−1, 0, 4); C(0, −2, −1).***

  Hãy trả lời các câu 8, 9, 10 và 11.

8 Phương trình mặt phẳng qua A và ⊥ BC là :

a) $x - 2y - 5z + 5 = 0$ b) $x - 2y - 5z - 5 = 0$

c) $x - 2y - 5z = 0$ d) $x - 2y + 5z - 5 = 0$.

9 Phương trình mặt phẳng qua A, B, C là :

a) $15x - 10y + 7z - 13 = 0$ b) $15x + 10y + 7z - 13 = 0$

c) $15x - 10y + 7z + 13 = 0$ d) $15x - 10y + 7z - 1 = 0$.

10 Phương trình mặt phẳng trung trực của AC là :

a) $2x + 3y + \frac{1}{2} = 0$

b) $2x + 3y - \frac{1}{2} = 0$

c) $2x - 3y + \frac{1}{2} = 0$

d) Các kết quả a, b, c đều sai.

11 Phương trình mặt phẳng qua A, B và vuông góc mặt phẳng (Oyz) là :

a) $5x - z + 6 = 0$

b) $5x + z + 6 = 0$

c) $5y + z + 4 = 0$

d) $5y + z - 4 = 0$.

12 Phương trình mặt phẳng qua O(0, 0, 0) và có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (1, -2, 3)$; $\vec{b} = (3, 0, 5)$ là :

a) $5x - 2y - 3z = 0$

b) $5x + 2y + 3z = 0$

c) $5x - 2y + 3z = 0$

d) $5x - 2y + 3z + 1 = 0$.

13 Phương trình mặt phẳng qua A(1, 1, 1) và vuông góc mp(Oyz) và (α) : $x - y + 2z = 0$ là :

a) $2y - z + 1 = 0$

b) $2y - z - 1 = 0$

c) $2y - z = 0$

d) $2y + z - 3 = 0$.

14 Cho các mặt phẳng (α) $x - 2 = 0$; (β) $y - 6 = 0$; (γ) $z + 3 = 0$.

Kết luận nào sau đây là sai :

a) Mp(β) song song Mp(Oxy)

b) $\alpha \perp \beta$

c) γ // Oz

d) $\gamma \perp \beta$.

15 Cho mp(P) : $2x + 3y - z + 2 = 0$ thì giao điểm (P) và các trục tọa độ là :

a) (0, 0, 2); (–1, 0, 0); $\left(0, -\frac{2}{3}, 0\right)$

b) (0, 0, 2); (1, 0, 0); $\left(0, -\frac{2}{3}, 0\right)$

c) (0, 0, –2); (–1, 0, 0); $\left(0, -\frac{2}{3}, 0\right)$

d) (1, 0, 0); (0, 0, 2); $\left(0, \frac{2}{3}, 0\right)$.

16 Cho mp(P) : $2x + 3y - z + 2 = 0$ thì (P) có cặp vectơ chỉ phương là :

a) (0, –1, 3) và (1, 0, 2)

b) (3, 2, 0) và (1, 0, –2)

c) (3, –2, 0) và (0, 1, 3)

d) (3, 2, 0) và (0, 0, 1).

- ***Cho ba mặt phẳng :*** $(\alpha) : x + y - z - 2 = 0$,

$(\beta) : x + y + 2z + 1 = 0$, $(\gamma) : x - y + 5 = 0$.

Hãy trả lời các câu 17, 18, 19.

17 Kết luận nào sau đây là sai :

a) $(\alpha) \perp (\beta)$

b) $(\alpha) \perp (\gamma)$

c) $(\beta) \perp (\gamma)$

d) $(\alpha) \perp$ mp(Oxy).

18 Phương trình mặt phẳng qua giao tuyến của (α) và (β) và qua $O(0, 0, 0)$ là :

a) $3x + 3y + 3z + 1 = 0$ b) $x + y + z = 0$

c) $x - y + z = 0$ d) $x - y - z = 0$.

19 Góc tạo bởi 2 mặt phẳng (γ) và mp(Oxz) là :

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $-\frac{\pi}{4}$.

20 Cho mặt phẳng (P) $x + y + 3 = 0$ và (Q) $y - z = 0$ thì góc của 2 mặt phẳng trên là :

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $-\frac{\pi}{3}$ d) $-\frac{2\pi}{3}$.

21 Gọi H là hình chiếu vuông góc của $A(2, -1, -1)$ lên mp (α) :

$16x - 12y - 15z - 4 = 0$ thì độ dài AH bằng :

a) 55 b) $\frac{11}{5}$ c) $\frac{11}{25}$ d) $\frac{22}{5}$.

22 Khoảng cách giữa 2 mặt phẳng (P) : $x + y - z + 5 = 0$,

(Q) : $2x + 2y - 2z + 3 = 0$ bằng :

a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ b) 2 c) $\frac{7}{2\sqrt{3}}$ d) 0.

23 Cho tứ diện OABC với $O(0, 0, 0)$; $A(3, 0, 0)$; $B(0, 1, 0)$; $C(0, 0, 2)$ thì khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) là :

a) $-\frac{6}{7}$ b) $\frac{6}{7}$ c) -6 d) 6.

24 Cho $A(1, 1, 0)$; $B(0, -1, 2)$; $C(1, 1, 1)$ thì kết luận nào sau đây là sai :

a) $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (2, -2, -1)$ b) Diện tích ΔOAB bằng $\frac{3}{2}$

c) Phương trình mp(OAB) : $2x - 2y - z = 0$.

d) Khoảng cách từ C đến mp(OAB) bằng $\frac{1}{2}$.

25 Cho mp(α) : $(m + 3)x - 2y + (5m + 1)z + 1 = 0$

và mp(β) : $2x - y + 3z + m - 6 = 0$.

Mặt phẳng $\alpha \parallel \beta$ khi :

a) $m = 0$ b) $m = 1$ c) $m = -1$ d) $m = \pm 1$.

26 Điểm trên trục tung cách đều 2 mặt phẳng $(\alpha) : x + y + z + 1 = 0$ và $(\beta) : x - y + z + 5 = 0$ là :

a) $M(2, 0, 0)$ b) $M(0, 0, 2)$ c) $M(0, -2, 0)$ d) $M(0, 2, 0)$.

27 Tập hợp các điểm cách đều 2 mặt phẳng $(\alpha) : x + y + z + 1 = 0$ và $(\beta) : x + y + z + 3 = 0$:

a) Đường thẳng $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x + y + z + 3 = 0 \end{cases}$ b) $M(1, -1, 0)$

c) Mặt phẳng $(\gamma) : x + y + z + 2 = 0$

d) Mặt phẳng : $x + y - z - 2 = 0$.

28 Tập hợp các điểm cách đều 2 mặt phẳng $(\alpha) : x - 2y + z + 5 = 0$ và $(\beta) : 2x - y + z + 8 = 0$ là :

a) Mp : $x + y + 3 = 0$ b) Mp : $3x - 3y + 2z + 13 = 0$

c) Hai kết quả a, b đều đúng d) Hai kết quả a, b đều sai.

29 Số điểm trên z'Oz mà cách đều $A(1, 0, -1)$ và mặt phẳng (α) : $x + 2y - 2z = 0$ là :

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3.

30 Phương trình mặt phẳng qua $A(1, 0, 0)$; $B(0, 1, 0)$ và tạo với mp(Oyz) một góc 60^0 là :

a) $x + y + \sqrt{2}z - 1 = 0$ b) $x + y - \sqrt{2}z - 1 = 0$

c) Hai kết quả a, b cùng đúng d) Hai kết quả a, b cùng sai.

TRẢ LỜI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Phương trình mp (ABC) : $\frac{x}{8} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x - 4y + 2z - 8 = 0.$

Chọn d.

2 Ta có $I(1, 0, 0)$; $H(0, 2, 0)$; $K(0, 0, 3)$.

Vậy phương trình mp (IHK) : $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$

Chọn b.

3 Mp(Oyz) có phương trình : $x = 0$

Vậy phương trình mp // (Oyz) : $x + D = 0 \ (\alpha)$

$A(1, -1, 1) \in \alpha \quad \Rightarrow \quad D = -1$. Chọn a.

$\boxed{4}$ Xét mp : $Ax + By + Cz + D = 0\ (\alpha)$

$D \neq 0 \ \wedge\ A = 0$ thì $(\alpha)\ //\ x'Ox$

$D \neq 0 \ \wedge\ B = 0$ thì $(\alpha)\ //\ y'Oy$

$D \neq 0 \ \wedge\ C = 0$ thì $(\alpha)\ //\ z'Oz$

$C = D = 0$ thì (α) qua Oz. Chọn b đúng.

$\boxed{5}$ Phương trình mp : $1(x - 1) - 4(y - 2) + 1(z - 3) = 0$

$\Leftrightarrow\ x - 4y + z + 4 = 0.$ Chọn a.

$\boxed{6}$ Mp(α) // Ox có dạng $By + Cz + D = 0$ loại a, b.

Ta có VTCP $\vec{i} = (1, 0, 0)$

$\overrightarrow{EF} = (7, 2, -2) \Rightarrow$ PVT $\vec{n} = (0, 2, 2)$

Phương trình mp : $0 + 1(y + 1) + 1\,(z - 1) = 0 \Leftrightarrow$ **$y + z = 0$. Chọn c.**

$\boxed{7}$ Mặt phẳng chứa Oy có dạng $Ax + Cz + 0$ loại a, c.

Thay tọa độ A vào 2 mặt phẳng của b, d. Chọn b.

$\boxed{8}$ PVT $\overrightarrow{BC} = (1, -2, -5)$

Phương trình mp là : $1(x - 2) - 2(y - 1) - 5(z + 1) = 0$

$\Leftrightarrow\ x - 2y - 5z - 5 = 0.$ Chọn b.

$\boxed{9}$ $\overrightarrow{BC} = (1, -2, -5)$; $\overrightarrow{AB} = (-3, -1, 5)$

$\Rightarrow$ PVT $\vec{n}_{ABC} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}] = (-15, 10, -7)$

Phương trình mp(ABC) : $15(x - 2) - 10(y - 1) + 7(z + 1) = 0$

$\Leftrightarrow$ **$15x - 10y + 7z - 13 = 0$. Chọn a.**

$\boxed{10}$ Trung điểm I của AC là $I\left(1, -\dfrac{1}{2}, -1\right)$.

Mặt phẳng trung trực của AC qua I và PVT là $\overrightarrow{AC} = (-2, -3, 0)$

$$2(x - 1) + 3\left(y + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - \frac{1}{2} = 0.$$ **Chọn b.**

$\boxed{11}$ Mặt phẳng cần tìm có VTCP $\overrightarrow{AB} = (-3, -1, 5)$ và $\vec{i} = (1, 0, 0)$

$\Rightarrow$ PVT$(0, 5, 1)$

Phương trình mp : $0 + 5(y - 1) + 1(z + 1) = 0$

$\Leftrightarrow\ 5y + z - 4 = 0.$ Chọn d.

12 $\vec{a} = (1, -2, 3)$; $\vec{b} = (3, 0, 5)$

$\Rightarrow$ PVT $(-10, 4, 6) = -2(5, -2, -3)$

Phương trình mp : $5x - 2y - 3z = 0$. Chọn a.

13 VTCP $(1, 0, 0)$

$(1, -1, 2)$

$\Rightarrow$ PVT $\vec{n} = (0, +2, 1)$

Phương trình mp : $0 + 2(y - 1) + 1(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow$ $2y + z - 3 = 0$. Chọn d.

14 $(\gamma) : z + 3 = 0$

γ // Oz phải có dạng $Ax + By + D = 0$

Kết luận c sai.

15 $(P) : 2x + 3y - z + 2 = 0$

Giao điểm (P) và z'Oz : Cho $x = y = 0$ $\Rightarrow$ $z = 2$

Giao điểm (P) và x'Ox : Cho $y = z = 0$ $\Rightarrow$ $x = -1$

Giao điểm (P) và y'Oy : Cho $x = z = 0$ $\Rightarrow$ $y = -\frac{2}{3}$

Chọn a.

16 (P) có PVT $\vec{n} = (2, 3, -1)$

Xét c) : (P) có VTCP $\vec{a} = (3, -2, 0)$

$\vec{b} = (0, 1, 3)$

Vậy có PVT $\vec{n} = (-6, -9, 3) = -3(2, 3, -1)$. Chọn c.

- $(\alpha) : x + y - z - 2 = 0$ có PVT $\vec{n} = (1, 1, -1)$

$(\beta) : x + y + 2z + 1 = 0$ có PVT $\vec{m} = (1, 1, 2)$

$(\gamma) : x - y + 5 = 0$ có PVT $\vec{r} = (1, -1, 0)$

17 Ta có $\vec{n} . \vec{m} = 0$, $\vec{n} . \vec{r} = 0$, $\vec{m} . \vec{r} = 0$

Các kết luận a, b, c đều đúng.

Mp(Oxy) : $z = 0$ có PVT $\vec{k} = (0, 0, 1)$

Ta có : $\vec{n} . \vec{k} = -1 \neq 0$. Vậy d sai.

$\boxed{18}$ Mặt phẳng qua giao tuyến (α), (β) : $m(x + y + 2z + 1) + 1(x + y - z - 2) = 0$

$O \in Mp \quad \Rightarrow \quad m = 2$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm : $3x + 3y + 3z = 0$. Chọn b.

$\boxed{19}$ Mp(Oxz) có phương trình y = 0 nên PVT $\vec{f} = (0, 1, 0)$

Ta có : $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{r}\,.\,\vec{f}|}{|\vec{r}|\,|\vec{f}|} = \dfrac{|-1|}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Chọn c.

$\boxed{20}$ Ta có $\vec{n_1} = (1, 1, 0)$; $\quad \vec{n_2} = (0, 1, -1)$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n_1}\,.\,\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\,|\vec{n_2}|} = \frac{|1|}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$$ Chọn a.

$\boxed{21}$ $$AH = \delta(A, \alpha) = \frac{|32 + 12 + 15 - 4|}{\sqrt{16^2 + 12^2 + 15^2}} = \frac{55}{25} = \frac{11}{5}.$$ Chọn b.

$\boxed{22}$ Ta có (P) // (Q)

Chọn I(0, 0, 5) ∈ (P) thì $\delta(P, Q) = \delta(I, Q) = \dfrac{|-10+3|}{\sqrt{12}} = \dfrac{7}{2\sqrt{3}}$. Chọn c.

$\boxed{23}$ A(3, 0, 0); B(0, 1, 0); C(0, 0, 2)

Phương trình mp(ABC) : $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 6y + 3z - 6 = 0$

$$\delta(O, mp(ABC)) = \frac{|-6|}{\sqrt{4 + 36 + 9}} = \frac{6}{7}.$$ Chọn b.

$\boxed{24}$ $\overrightarrow{OA} = (1, 1, 0)$; $\quad \overrightarrow{OC} = (1, 1, 1)$; $\quad \overrightarrow{OB} = (0, -1, 2)$

$\Rightarrow \quad [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (2, -2, 1)$ → a đúng

$\Rightarrow \quad S = Dt\,(\Delta OAB) = \dfrac{1}{2}\sqrt{4 + 4 + 1} = \dfrac{3}{2}$ → b đúng

Phương trình mặt phẳng (OAB) : $2(x - 1) - 2(y - 1) - z = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x - 2y - z = 0$ → c đúng

$\delta(C, mp\,(OAB)) = \dfrac{1}{3}$ → d sai.

$\boxed{25}$ α // β khi $\dfrac{m+3}{2} = \dfrac{-2}{-1} = \dfrac{5m+1}{+3} \neq \dfrac{1}{m-6} \quad (*)$

Thay m = 1 vào thấy (*) thỏa. Vậy chọn b.

26 Gọi $M(0, m, 0) \in y'Oy$

$$\delta(M, \alpha) = \delta(M, \beta) \Leftrightarrow \frac{|m+1|}{3} = \frac{|-m+5|}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow m + 1 = -m + 5 \vee m + 1 = m - 5$$

$\Leftrightarrow m = 2.$ Chọn d.

27 $$\delta(M, \alpha) = \delta(M, \beta) \Leftrightarrow \frac{|x+y+z+1|}{\sqrt{3}} = \frac{|x+y+z+3|}{\sqrt{3}}$$

$\Leftrightarrow 2x + 2y + 2z + 4 = 0.$ Chọn c.

28 $$\delta(M, \alpha) = \delta(M, \beta) \Leftrightarrow \frac{|x-2y+z+5|}{\sqrt{6}} = \frac{|2x-y+z+8|}{\sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2y + z + 5 = 2x - y + z + 8 \\ x - 2y + z + 5 = -2x + y - z - 8 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x + y + 3 = 0 \vee 3x - 3y + 2z + 13 = 0.$ Chọn c.

29 Gọi $M(0, 0, m) \in Oz$.

Ta có : $\delta(M, \alpha) = MA \Leftrightarrow \dfrac{|-2m|}{\sqrt{9}} = \sqrt{(m+1)^2 + 1}$

$$\Leftrightarrow 4m^2 = 9(m^2 + 2m + 2)$$

$\Leftrightarrow 5m^2 + 18m + 18 = 0$ vô nghiệm. Chọn a.

30 Mp có dạng $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{m} = 1 \Leftrightarrow mx + my + z - m = 0$

Mp(Oyz) có phương trình $x = 0$.

Ta có : $\cos 60^0 = \dfrac{|m|}{\sqrt{2m^2 + 1}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 4m^2 + 2m^2 + 1$

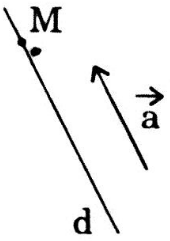
$$\Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow m = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$ Chọn c.

Bài 3 ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1. Phương trình đường thẳng

a) Đường thẳng qua $M(x_o, y_o, z_o)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ thì có :



** Phương trình chính tắc là :* $\dfrac{x - x_o}{a_1} = \dfrac{y - y_o}{a_2} = \dfrac{z - z_o}{a_3}$

** Phương trình tham số là :* $\begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_o + a_3 t \end{cases} \quad t \in R.$

b) Phương trình tổng quát đường thẳng (D) là :

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad \text{với } A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2.$$

Chú ý : Nếu $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$; $\vec{n}_2 (A_2, B_2, C_2)$ thì vectơ chỉ phương của (D) là : $\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$.

2. Góc của 2 đường thẳng

Nếu đường thẳng (D_1) có vectơ chỉ phương $\vec{a}$, đường thẳng (D_2) có vectơ chỉ phương $\vec{b}$

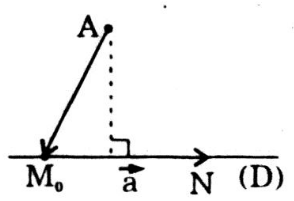
Gọi φ $(0 \leq \varphi \leq 90^o)$ là góc của (D_1) và (D_2) thì : $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$

3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Gọi φ $(0 \leq \varphi \leq 90^o)$ là góc giữa đường thẳng (D_1) và mặt phẳng (P) có pháp vectơ $\vec{n}$ thì : $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{a}.\vec{n}|}{|\vec{a}|.|\vec{n}|}$

4. Khoảng cách từ 1 điểm đến đường thẳng

Nếu (D) là đường thẳng qua $M_o(x_o, y_o, z_o)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}$ thì



$$\delta(A, D) = \frac{\left\| \left[\overrightarrow{AM}, \vec{a} \right] \right\|}{|\vec{a}|}.$$

BÀI TẬP

Bài 1. Viết phương trình đường thẳng (Δ) qua M(1, 1, 2) và song song đường thẳng (d) : $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$

GIẢI

Xét $\vec{n_1} = (3, -1, 2)$; $\vec{n_2} = (1, 3, -2)$.

Vectơ chỉ phương của (d) : $\vec{a} = [\vec{n_1}, \vec{n_2}] = (-4, 8, 10) = 2(-2, 4, 5)$

Do đó phương trình chính tắc đường thẳng (Δ) qua M là :

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{5}. \quad ■$$

Bài 2. Tìm tập hợp các điểm trong không gian cách đều 3 điểm A(1, 1, 1); B(–1, 2, 0); C(2, –3, 2).

GIẢI

M(x, y, z) là điểm cách đều 3 điểm A, B, C.

$$\Leftrightarrow \quad MA = MB = MC \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} MA^2 = MB^2 \\ MA^2 = MC^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 3 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 5 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 2y - 2z + 3 = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 4z + 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ x - 4y + z - 7 = 0 \end{cases}$$

Tập hợp các điểm M là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC có phương trình trên. ■

Bài 3. *Tuyển sinh Đại học khối D 2007*

Cho A(1, 4, 2); B(–1, 2, 4) và đường thẳng Δ : $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$.

a) Viết phương trình đường thẳng qua trọng tâm G của ΔOAB và $\perp$ mp(CAB).

b) Tìm M trên Δ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

GIẢI

a) Ta có trọng tâm G(0, 2, 2)

Mặt phẳng (OAB) có VTCP $\overrightarrow{OA} = (1, 4, 2)$ và $\overrightarrow{OB} = (-1, 2, 4)$

nên có PVT $\vec{n} = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = 6(2, -1, 1)$

(d) qua G và $\perp$ mp(OAB) nên nhận $\vec{n}$ là VTCP.

Phương trình (d) : $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$.

b) Phương trình tham số đường thẳng (Δ) là $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 2t \end{cases}$

$M \in \Delta$ nên $\exists t$ sao cho $M(1 - t, t - 2, 2t)$

Ta có :

$$\begin{aligned} f(t) &= MA^2 + MB^2 \\ &= t^2 + (t-6)^2 + (2t-2)^2 + (2-t)^2 + (t-4)^2 + (2t-4)^2 \\ &= 12t^2 - 48t + 76 \\ &= 12(t-2)^2 + 28 \geq 28 \end{aligned}$$

Vậy $\min\limits_{t \in R} f(t) = 28 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow M(-1; 0; 4)$. ■

Bài 4. Cho $H\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$; $K\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$; $I\left(1, 1, \frac{1}{3}\right)$.

a) Viết phương trình đường giao tuyến của mặt phẳng (HKI) và mặt phẳng: $x + z = 0$ ở dạng chính tắc.

b) Tính cosin góc tạo bởi mặt phẳng (HKI) và mặt phẳng (Oxy).

GIẢI

a) Ta có : $\overrightarrow{HI} = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}\right)$; $\overrightarrow{HK} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ là vectơ chỉ phương của mặt phẳng (HKI)

$\Rightarrow$ Pháp vectơ $\vec{n} = [\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HK}] = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{12}(2, 2, -9)$

Vậy phương trình mặt phẳng (HIK) là :

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right) - 2y - 9z = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y - 9z - 1 = 0$$

Vậy phương trình tổng quát của đường giao tuyến 2 mặt phẳng (HKI) và $x + z = 0$ là (d) : $\begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + 2y - 9z - 1 = 0 \end{cases}$

Ta có : $\vec{n_1} = (1, 0, 1)$; $\vec{n_2} = (2, 2, -9)$.

Vậy vectơ chỉ phương của (d) : $\vec{a} = (-2, 11, 2)$

Dễ dàng thấy $A\left(0, \frac{1}{2}, 0\right) \in (d)$

Do đó phương trình chính tắc (d) : $\frac{x}{-2} = \frac{y - \frac{1}{2}}{11} = \frac{z}{2}$.

b) Phương trình mặt phẳng Oxy : $z = 0 \Rightarrow$ Pháp vectơ $\vec{n} = (0, 0, 1)$

Mặt phẳng (HKI) có pháp vectơ $\vec{n_2} = (2, 2, -9)$

Gọi φ góc nhọn của mặt phẳng Oxy và mặt phẳng (HKI)

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}.\vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{n_2}\right|} = \frac{|-9|}{\sqrt{1}.\sqrt{89}} = \frac{9}{\sqrt{89}}. \quad ■$$

Bài 5. Xác định góc nhọn tạo bởi đường thẳng (d) : $\begin{cases} x + 4y - 2z + 7 = 0 \\ 3x + 7y - 2z = 0 \end{cases}$ và mặt phẳng (α) : $3x + y - z + 1 = 0$.

GIẢI

Ta có : $\vec{n_1} = (1, 4, -2)$; $\vec{n_2} = (3, 7, -2)$

$\Rightarrow$ Vectơ chỉ phương của (d) : $\vec{a} = (6, -4, -5)$

Mà pháp vectơ của α là : $\vec{n_\alpha} = (3, 1, -1)$

Gọi φ góc nhọn giữa (d) và mặt phẳng (α) thì

$$\sin\varphi = \frac{\left|\vec{a}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \frac{|18 - 4 + 5|}{\sqrt{36 + 16 + 25}.\sqrt{9 + 1 + 1}} = \frac{19}{11\sqrt{7}}. \quad ■$$

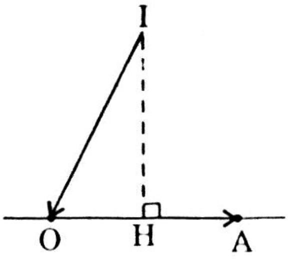
Bài 6. *Tuyển sinh Đại học khối B 2003.*

Cho A(2, 0, 0); B(0, 0, 8); $\overrightarrow{AC} = (0, 6, 0)$. Tính khoảng cách từ trung điểm I của BC đến đường thẳng OA.

GIẢI

Ta có : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$

Vậy $C(2, 6, 0)$ và $I(1, 3, 4)$



(OA) qua $O(0, 0, 0)$ và có VTCP $\overrightarrow{OA} = (2, 0, 0)$

Ta có : $\overrightarrow{OI} = (1, 3, 4)$

$\Rightarrow \quad [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}] = (0, -8, 6)$

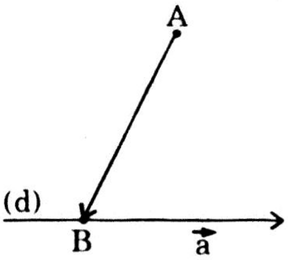
Do đó $\delta(I, OA) = \dfrac{|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}]|}{OA} = \dfrac{\sqrt{64 + 36}}{2} = 5.$ ■

Bài 7. Cho $A(1, 2, 1)$ và (d) : $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y - 1}{4} = x + 3$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (A, (d)).

b) Tính khoảng cách từ A đến (d).

GIẢI



a) (d) qua $B(0, 1, -3)$ và có VTCP là $\vec{a} = (3, 4, 1)$.

Mặt phẳng (A, (d)) qua A và có cặp VTCP là

$\vec{a} = (3, 4, 1)$ và $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -4)$

Vậy có PVT $\vec{n} = [\vec{a}, \overrightarrow{AB}] = (15, -11, -1)$

Phương trình mặt phẳng (A, (d)) là :

$15(x - 1) - 11(y - 2) - 1(z - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 15x - 11y - z + 18 = 0$

b) Ta có $\delta(A, (d)) = \dfrac{|[\vec{a}, \overrightarrow{AB}]|}{|\vec{a}|} = \dfrac{\sqrt{15^2 + 11^2 + 1}}{\sqrt{9 + 16 + 1}} = \dfrac{\sqrt{347}}{\sqrt{26}}$. ■

Bài 8. *Tuyển sinh Đại học khối A 2002.*

Cho $(\Delta_1) : \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$ và $(\Delta_2) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

a) Viết phương trình mặt phẳng chứa (Δ_1) và song song (Δ_2).

b) Cho $M(2, 1, 4)$. Tìm điểm H thuộc (Δ_2) sao cho MH ngắn nhất.

GIẢI

a) Xét (Δ_1) ta có : $\vec{n_1} = (1, -2, 1)$ và $\vec{n_2} = (1, 2, -2)$

Vậy (Δ_1) có VTCP $\vec{a} = [\vec{n_1}, \vec{n_1}] = (2, 3, 4)$

(Δ_2) có VTCP $\vec{b} = (1, 1, 2)$

(Δ_1) qua A(0, −2, 0)

Do đó mặt phẳng chứa (Δ_1) và song song (Δ_2) là mặt phẳng qua A và có cặp VTCP là $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nên PVT $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = (2, 0, -1)$.

Phương trình mặt phẳng là : $2(x - 0) + 0(y + 2) - 1(z - 0) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x - z = 0.$

b) • ***Cách 1 :*** Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc (Δ_2)

(α) nhận $\vec{b} = (1, 1, 2)$ là PVT

Phương trình (α) : $1(x - 2) + 1(y - 1) + 2(z - 4) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x + y + 2z - 11 = 0 \quad (*)$

Thay x, y, z của phương trình (Δ_2) vào (*), ta được :

$$(1 + t) + (2 + t) + 2(1 + 2t) - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 6t - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1$$

Vậy MH_{min} $\Leftrightarrow$ H là giao điểm (Δ_2) và (α) $\Leftrightarrow$ H(2, 3, 3).

• ***Cách 2 :*** $H \in (\Delta_2)$ nên $H(1 + t, 2 + t, 1 + 2t)$

Ta có $\overrightarrow{MH} = (t - 1, t + 1, 2t - 3)$

Vậy $\quad MH^2 = (t - 1)^2 + (t + 1)^2 + 2(t - 3)^2 = 6\left(t^2 - 2t + \dfrac{11}{6}\right)$

$$= 6(t - 1)^2 + 5 \geq 5$$

Dấu "=" xảy ra khi t = 1

Do đó $MH_{min} = \sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad H(2, 3, 3)$. ■

Bài 9. Viết phương trình đường thẳng qua A(3, −2, −4), song song mặt phẳng : $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ đồng thời cắt đường thẳng (d) :

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 4}{-2} = \frac{z - 1}{2}.$$

GIẢI

Phương trình tham số đường thẳng (d) : $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4 - 2t \quad\quad t \in R \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Gọi B là giao điểm của đường thẳng (Δ) cần tìm và (d).

Do $B \in (d)$ nên $\exists t_o \in R$ sao cho $B(2 + 3t_o, -4 - 2t_o, 1 + 2t_o)$

Vậy : $\overrightarrow{AB} = (3t_o - 1, -2 - 2t_o, 5 + 2t_o)$ là vectơ chỉ phương của (Δ)

Do (Δ) song song mặt phẳng (P) : $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3, -2, -3)$

Nên $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n} \Rightarrow 3(3t_o - 1) + 4 + 4t_o - 3(5 + 2t_o) = 0$

$\Rightarrow 7t_o - 14 = 0 \Rightarrow t_o = 2$

Do đó $\overrightarrow{AB} = (5, -6, 9)$ là vectơ chỉ phương của (Δ)

Vậy phương trình chính tắc của (Δ) là : $\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+4}{9}$. ■

Bài 10. *Tuyển sinh Đại học khối B 2004.*

Viết phương trình đường thẳng (Δ) qua $A(-4, -2, 4)$ cắt và vuông góc (d):

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}.$$

GIẢI

Gọi I là giao điểm (Δ) và (d).

Do $I \in (d)$ nên $\exists\, t_o \in R$ để : $I(2t_o - 3, 1 - t_o, 4t_o - 1)$

(d) có VTCP $\vec{a} = (2, -1, 4)$

(Δ) có VTCP $\overrightarrow{AI} = (2t_o + 1, 3 - t_o, 4t_o - 5)$

Do $(\Delta) \perp (d)$ nên $\vec{a} \perp \overrightarrow{AI} \Rightarrow 2(2t_o + 1) - (3 - t_o) + 4(4t_o - 5) = 0$

$\Rightarrow 21t_o - 21 = 0 \Rightarrow t_o = 1$

(Δ) qua A và có VTCP $\overrightarrow{AI} = (3, 2, -1)$

Phương trình (Δ) là : $\frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}$. ■

Bài 11. Cho (d) : $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P) : x - y - z - 1 = 0$.

Viết phương trình chính tắc đường thẳng (Δ) qua $A(1, 1, -2)$ song song mặt phẳng (P) và vuông góc (d).

GIẢI

Vì đường thẳng $(\Delta) \perp$ đường thẳng (d), vậy vectơ chỉ phương của (Δ) là $\vec{a}_\Delta$ vuông góc $\vec{u}_d = (2, 1, 3)$

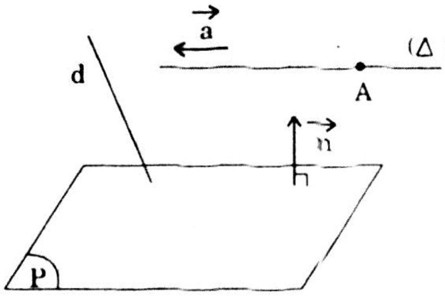
Vì đường thẳng (Δ) // mặt phẳng (P), vậy vectơ chỉ phương của (Δ) là $\vec{a}_\Delta$ vuông góc với pháp vectơ của (P) là $\vec{n}_P = (1, -1, -1)$

Do đó $\vec{a}_\Delta = [\vec{u}, \vec{n}]$

$\Rightarrow \quad \vec{a}_\Delta = (2, 5, -3)$

Vậy phương trình chính tắc của (Δ) qua A là :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}. \quad \blacksquare$$



Bài 12. *Đề Dự bị khối D 2006*

Cho A(1, 2, 0); B(0, 4, 0); C(0, 0, 3).

a) Viết phương trình đường thẳng d qua O và vuông góc mp(ABC).

b) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa OA mà khoảng cách từ B đến mp(α) bằng khoảng cách từ O đến mp(α).

GIẢI

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$; $\overrightarrow{AC} = (-1, -2, 3)$

PVT của mp(ABC) là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (6, 3, 4)$

(d) qua O và ⊥ mp(ABC) vậy (d) nhận $\vec{n}$ là VTCP.

Phương trình chính tắc (d) : $\frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

b) Phương trình chính tắc OA : $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}$

Phương trình tổng quát của OA : $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Phương trình mp(α) chứa OA có dạng : $m(2x - y) + n(z) = 0 \quad (m^2 + n^2 \neq 0)$

$$\Leftrightarrow \quad 2mx - my + nz = 0$$

Ta có : $\delta(B, \alpha) = \delta(C, \alpha) \Leftrightarrow \frac{|-4m|}{\sqrt{5m^2 + n^2}} = \frac{|3n|}{\sqrt{5m^2 + n^2}} \Leftrightarrow 4m = \pm 3n$

Chọn n = 4 thì m = ±3

Phương trình mp(α) là : $6x - 3y + 4z = 0$ và $-6x + 3y + 4z = 0$. ■

Bài 13. *Đề tuyển sinh khối B 2006*

Cho A(0, 1, 2) và $d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$, $d_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t. \\ z = 2 + t \end{cases}$

a) Viết phương trình mặt phẳng (α) qua A và song song d_1, d_2.

b) Tìm M trên d_1, N trên d_2 sao cho A, M, N thẳng hàng.

GIẢI

a) (α) có VTCP là : $\vec{a} = (2, 1, -1)$ và $\vec{b} = (1, -2, 1)$

$\Rightarrow$ PVT $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = (-1, -3, -5) = -(1, 3, 5)$

Phương trình mp(α) qua A : $1(x - 0) + 3(y - 1) + 5(z - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x + 3y + 5z - 13 = 0$

b) Gọi $M \in d_1$ thì $\exists u \in R$ sao cho $M(2u, 1 + u, -1 - u)$

$N \in d_2$ thì $\exists t \in R$ sao cho $N(1 + t, -1 - 2t, 2 + t)$

Ta có : $\overrightarrow{AM} = (2u, u, -u - 3)$; $\overrightarrow{AN} = (t + 1, -2 - 2t, t)$

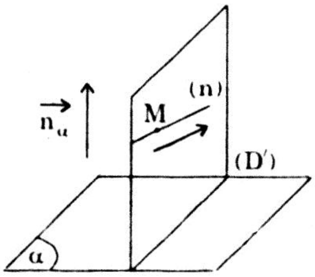
A, M, N thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\overrightarrow{AN}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2u}{t+1} = \dfrac{u}{-2-2t} \\ \dfrac{2u}{t+1} = \dfrac{-u-3}{t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4u - 4ut = ut + u \\ 2ut = -ut - 3 - 3t - u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5u(1 + t) = 0 \\ 3ut = -3 - 3t - u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ t = -1 \end{cases}$$

Vậy M(0, 1, –1); N(0, 1, 1). ■

CHÚ Ý 1. Viết phương trình hình chiếu của đường thẳng (D) lên mặt phẳng (α)



- + Tìm M ∈ (D), VTCP $\vec{a}$ của đường thẳng (D), PVT $\vec{n}$ của (α)
- + Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa (D) và vuông góc mặt phẳng (α). Mặt phẳng (β) là mặt phẳng qua M và có cặp VTCP là $\vec{a}$ và $\vec{n}$
- + Đường thẳng hình chiếu vuông góc cần tìm chính là giao tuyến của (α) và (β)

Ghi chú : Khi phương trình (D) đang ở dưới dạng tổng quát, ta nên :

- Viết phương trình chùm mặt phẳng chứa (D)
- Gọi (β) là mặt phẳng thuộc chùm mà $\perp (\alpha)$
- Dùng điều kiện $\vec{n}_\alpha . \vec{n}_\beta = 0 \Rightarrow$ phương trình (β)
- (D') cần tìm là giao tuyến của (α), (β).

Bài 14. Tìm hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{1}$ lên các mặt phẳng.

a) xOy, **b)** yOz, **c)** xOz.

GIẢI

a) Gọi (α) là mặt phẳng chứa (d) và ⊥ mặt phẳng (xOy) nên (α) có VTCP là $\vec{a} = (2, 2, 1)$ và $\vec{k} = (0, 0, 1)$

$\Rightarrow$ PVT $\vec{n}_\alpha = [\vec{a}, \vec{k}] = 2(1, -1, 0)$

Phương trình mặt phẳng (α) là : $1(x-1) - 1(y+2) = 0 \Leftrightarrow x - y - 3 = 0$

Phương trình hình chiếu của (d) lên mặt phẳng (Oxy) là : $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

b) Gọi (β) là mặt phẳng chứa (d) và ⊥ (yOz)

(α) có VTCP là $\vec{a} = (2, 2, 1)$ và $\vec{i} = (1, 0, 0)$

$\Rightarrow$ PVT $[\vec{a}, \vec{i}] = (0, 1, -2)$

Phương trình mặt phẳng (β) là : $1(y+2) - 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow y - 2z + 8 = 0$

Phương trình hình chiếu của (d) lên mặt phẳng (yOz) là : $\begin{cases} y - 2z + 8 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

c) Gọi (γ) là mặt phẳng qua (d) và vuông góc với mặt phẳng (xOz).

(γ) có VTCP $\vec{a} = (2, 2, 1)$ và $\vec{j} = (0, 1, 0)$

$\Rightarrow$ PVT là $[\vec{a}, \vec{j}] = (-1, 0, 2)$

Phương trình (γ) là : $-1(x-1) + 2(z-3) = 0$

Phương trình hình chiếu của (d) lên mặt phẳng (Oxz) là :

$$\begin{cases} x - 2z + 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Bài 15. Cho đường thẳng (D) : $\begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases}$ và mặt phẳng (P) : $x + y + z - 3 = 0$.

Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (D) lên mặt phẳng (P).

GIẢI

Phương trình chùm mặt phẳng qua (D) là :

$$m(x + z - 3) + n(2y - 3z) = 0 \qquad (m^2 + n^2 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad mx + 2ny + (m - 3n)z - 3m = 0$$

Gọi (Q) là 1 mặt phẳng thuộc chùm trên mà vuông góc với mặt phẳng (P) $\Rightarrow \quad \vec{n}_1 = (1, 1, 1) \perp \vec{n}_2 = (m, 2n, m - 3n)$

$$\Rightarrow \quad m + 2n + m - 3n = 0 \quad \Rightarrow \quad 2m = n$$

Chọn m = 1, n = 2. Vậy phương trình mặt phẳng (Q) là :

$$x + 4y - 5z - 3 = 0$$

(D') là hình chiếu của (D) lên mặt phẳng (P) chính là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P) và (Q).

Phương trình (D') là : $\begin{cases} x + 4y - 5z - 3 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$ ■

Bài 16. Cho đường thẳng (D) : $\begin{cases} x - my + z - m = 0 \\ mx + y - m - 1 = 0 \end{cases}$

a) Viết phương trình hình chiếu (D') của (D) lên mặt phẳng (Oxy).

b) Chứng minh (D') luôn tiếp xúc 1 đường tròn cố định trên mặt phẳng (Oxy).

GIẢI

a) Phương trình chùm mặt phẳng chứa (D) và vuông góc mặt phẳng (Oxy) có dạng :

$$\lambda(x - my + z - 1) + \mu(mx + y - mz - 1) = 0 \quad (\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda + m\mu)x + (\mu - \lambda m)y + (\lambda - m\mu)z - m\lambda - \mu = 0$$

Do mặt phẳng này vuông góc Oxy (z = 0) nên :

$$\lambda - m\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = m\mu$$

Chọn $\mu = 1$ và $\lambda = m$ ta được : $2mx + (1 - m^2)y + (1 + m^2) = 0$

Vậy phương trình hình chiếu cần tìm là : $\begin{cases} 2mx + (1 - m^2)y - 1 - m^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

b) Trên mặt phẳng (Oxy) xét $(d_m) : 2mx + (1 - m^2)y - 1 - m^2 = 0$

Gọi I(a, b) ta có : $\delta(I, d_m) = \dfrac{|2ma + (1 - m^2)b - (1 + m^2)|}{\sqrt{4m^2 + (1 - m^2)^2}}$

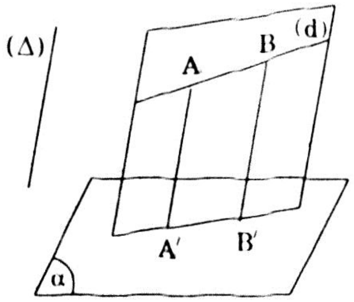
Chọn a = b = 0 ta được : $\delta(I, d_m) = \dfrac{|-(1 + m^2)|}{\sqrt{m^4 + 2m^2 + 1}} = 1$

Do đó (dm) luôn tiếp xúc đường tròn tâm O bán kính 1. ■

CHÚ Ý 2. Phương pháp viết phương trình hình chiếu song song của đường thẳng (d) theo phương (Δ) lên mặt phẳng (α)

Cho (d) và (Δ) là hai đường thẳng chéo nhau (hay cắt nhau)

- Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa (d) và song song (Δ) (hay chứa (d) và (Δ) khi (d) và (Δ) cắt nhau.
- Hình chiếu song song của (d) theo phương (Δ) lên (α) chính là giao tuyến của 2 mặt phẳng α và β.



Bài 17. Cho : (d) : $\begin{cases} 2x - y - 11 = 0 \\ x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$ (Δ): $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-6}{3}$

a) Chứng minh (d) và (Δ) cùng nằm trên 1 mặt phẳng. Viết phương trình mặt phẳng đó.

b) Viết phương trình chính tắc hình chiếu song song của (d) theo phương (Δ) lên mặt phẳng (α) : $3x - 2y - 2z - 1 = 0$.

GIẢI

a) Phương trình tham số đường thẳng (Δ) : $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 6 + 3t \end{cases}$

Thay vào phương trình đường thẳng (d) ta được

$$\begin{cases} 2(5 + 2t) - 2 - t - 11 = 0 \\ (5 + 2t) - (2 + t) - (6 + 3t) + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t - 3 = 0 \\ -2t + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

Do đó : (d) cắt (Δ) tại I(7, 3, 9)

Vậy (d) và (Δ) cùng nằm trên mặt phẳng (β).

VTCP của (β) là $\vec{a}_d = (1, 2, -1)$ và $\vec{b}_\Delta = (2, 1, 3)$

$\Rightarrow$ PVT $\vec{n}_\beta = [\vec{a}, \vec{b}] = (7, -5, -3)$

Phương trình mặt phẳng (β) là : $7(x - 7) - 5(y - 3) - 3(z - 9) = 0$

$\Leftrightarrow 7x - 5y - 3z - 7 = 0.$

ường thẳng cần tìm chính là giao tuyến của (α) và (β) có phương trình tổng quát là (d') : $\begin{cases} 7x - 5y - 3z - 7 = 0 \\ 3x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$

Xét $\vec{n}_3 = (7, -5, -3)$; $\vec{n}_4 = (3, -2, -2)$

$\Rightarrow$ VTCP $\vec{a}_{d'} = [\vec{n}_3, \vec{n}_4] = (4, 5, 1)$

Cho x = 3 ta có : $\begin{cases} +5y + 3z = 14 \\ +2y + 2z = +8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

Vậy $I(3, 1, 3) \in (d')$

Phương trình chính tắc (d') là : $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-3}{1}$. ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. Viết phương trình đường thẳng qua I(−1, 2, 3) và

a) J(0, 1, 2)

b) song song đường thẳng $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + y - 3z + 5 = 0 \end{cases}$

c) vuông góc với 2 đường thẳng : $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

d) vuông góc và cắt đường thẳng $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z + \text{[illegible]}}{1}$

e) cắt 2 đường thẳng $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{1}$ và $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+1}{-5}$

g) vuông góc với (d) : $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{1}$ và cắt (d') : $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$

h) cắt trục tung và song song mặt phẳng $2x + y = 0$

i) cắt Oz và cắt đường thẳng $\begin{cases} x - z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$

BT2. Tính khoảng cách từ điểm A(−1, 2, 3) đến các đường thẳng

a) d_1 : $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+5}{3} = \dfrac{z-1}{0}$ **b)** d_2 : $\begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ 4x + y - 3z = 0 \end{cases}$

BT3. *Dự bị khối B 2002*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD hình vuông cạnh a. SA = a, SA ⊥ mp(ABCD). Gọi E trung điểm CD. Tính khoảng cách từ S đến BE.

BT4. Tìm góc tạo bởi các cặp đường thẳng sau :

a) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z}{-3}$ và $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -5 + 2t \\ z = -t \end{cases}$

b) $\dfrac{2x-1}{1} = \dfrac{3y+5}{4} = \dfrac{z+1}{-7}$ và $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x - 5y + 6z - 1 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y + 5z - 7 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} 4x + 3y - 1 = 0 \\ 2x + 4z + 5 = 0 \end{cases}$

BT5. Lập phương trình đường thẳng qua I(0, 2, 1) và tạo với 3 vectơ $\vec{a} = (1, 2, 2)$; $\vec{b} = (0, 3, 0)$; $\vec{c} = (0, 0, 1)$ các góc bằng nhau.

BT6. Cho (d) : $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ và mặt phẳng (α) : $x - y - z = 0$.

a) Viết phương trình đường thẳng qua I(1, 1, −2) song song (α) và vuông góc (d).

b) Gọi N là giao điểm (d) và (α). Tìm K trên (d) sao cho KM = KN.

BT7. Cho đường thẳng (D_k) $\begin{cases} x + kz - k = 0 \\ (1 - k)x - ky = 0 \end{cases}$ (với $k \neq 0$)

1. Chứng minh (D_k) luôn qua 1 điểm cố định.

2. Chứng minh (D_k) luôn nằm trên 1 mặt phẳng cố định.

BT8. Cho A(0, 1, 0); B(2, 2, 2); C(−2, 3, 1) và đường thẳng (d) :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$$

a) Tìm M ∈ (d) sao cho $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{AB}$.

b) Tìm N ∈ (d) sao cho thể tích hình chóp MABC bằng 3 đvtt.

c) Tìm D ∈ (d) sao cho diện tích ΔABD nhỏ nhất.

BT9. a) Cho (P) : $x + y + z + 1 = 0$ và đường thẳng (d) : $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{3}$

Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) lên mặt phẳng (P).

b) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng

(d) : $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{-2}$ lên mặt phẳng (P) : $x - y + 3z + 8 = 0$.

BT10. Cho đường thẳng (D) : $\begin{cases} x - z\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \\ y - z\cos\alpha - \sin\alpha = 0 \end{cases}$

a) Xác định vectơ chỉ phương của (D).

b) Chứng minh (D) tạo với trục Oz 1 góc không phụ thuộc α.

c) Viết phương trình hình chiếu (D') của (D) lên mặt phẳng (Oxy).

d) Chứng minh trên mặt phẳng (Oxy) đường thẳng (D') luôn tiếp xúc 1 đường tròn cố định.

BT11. Cho mặt phẳng (P) : $x + 2y - z + 5 = 0$

và đường thẳng (d) : $\dfrac{x+3}{2} = y + 1 = z - 3$

a) Tìm góc tạo bởi (d) và (P), tọa độ giao điểm I của d và (P).

b) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) lên (P)

c) Viết phương trình đường thẳng nằm trên mặt phẳng (P), qua giao điểm I và vuông góc với (d).

BT12. a) Viết phương trình mặt phẳng (α) qua A(2, –1, 5) và vuông góc đường thẳng (d) : $\begin{cases} 3x - 2y + z - 5 = 0 \\ 5x - 4y + 32 = 0 \end{cases}$

b) Tìm hình chiếu vuông góc của đường thẳng : $\dfrac{x-1}{-1} = y + 1 = \dfrac{z-1}{2}$ lên mặt phẳng (α).

BT13. Cho đường thẳng (d) : $\begin{cases} 2x - y - 2z - 3 = 0 \\ 2x - 2y - 3z - 17 = 0 \end{cases}$

và mặt phẳng (P) : $x - 2y + z - 3 = 0$.

a) Tìm tọa độ điểm đối xứng của A(3, –1, 2) qua (d).

b) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) lên (P).

BT14. *Dự bị Khối D 2003*

Cho A(2, 1, 1); B(0, –1, 3) và (d) : $\begin{cases} 3x - 2y - 11 = 0 \\ y + 3z - 8 = 0. \end{cases}$

a) Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của AB. Tìm K giao điểm của d và (P). Chứng minh d ⊥ I_K.

b) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d lên mp(Q) : $x + y - z + 1 = 0$.

BT15. *Dự bị Khối A 2004*

Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A(0, 0, 0); B(1, 0, 0); D(0, 1, 0); A'(0, 0, $\sqrt{2}$).

a) Viết phương trình mp(P) qua A', B, C và hình chiếu vuông góc của đường thẳng B'D' lên mp(P).

b) Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và vuông góc A'C'. Tính diện tích thiết diện hình chóp A'.ABCD và mp(Q).

BT16. Viết phương trình đường thẳng vuông góc mặt phẳng

$(\alpha): x + y + z - 2 = 0$ và cắt 2 đường thẳng :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

BT17. Lập phương trình đường thẳng qua M(−4, −5, 3) và cắt 2 đường thẳng

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1} \quad \text{và} \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$$

BT18. Cho họ mặt phẳng (P_m) có phương trình :

$$2x + y + z - 1 + m(x + y + z + 1) = 0$$

a) Chứng minh (P_m) đi qua 1 đường thẳng cố định (d) với ∀m.

b) Tìm m để $(P_m) \perp (P): 2x + y + z - 1 = 0$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d).

30 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

$\boxed{1}$ Phương trình tổng quát đường thẳng qua 2 điểm A(0, 1, 2); B(−1, 0, 1) là

a) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases}$ d) $x = y - 1 = z - 2$.

$\boxed{2}$ Cho đường thẳng (d) : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Giao điểm (d) và 3 mặt phẳng tọa độ là :

a) A(2, 3, 0); B(0, 1, −2); C(1, 0, 3)

b) A(2, 3, 0); B(0, 1, 2); C(−1, 0, 3)

c) A(2, 3, 0); B(0, 1, +2); C(+1, 0, 3)

d) A(2, −3, 0); B(0, 1, 2); C(1, 0, 3).

$\boxed{3}$ Phương trình đường thẳng qua M(0, 1, 1) và song song

$$(d): \begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases} \text{ là :}$$

a) $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+1}{-5}$ b) $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$

c) $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{-5}$ d) $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-1}{-5}$.

4 Cho A(1, 2, 0); B(0, 4, 0); C(0, 0, 3) phương trình đường thẳng qua O(0, 0, 0) và vuông góc mp(ABC) là :

a) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 4y - 3z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 6t \\ y = 3t \\ z = 4t \end{cases}$

c) $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}$ d) Các kết quả a, b, c đều đúng.

5 Cho (P) : $2x + my + z - 5 = 0$ và (d) : $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{-1}$.

Để d vuông góc (P) thì :

a) $m = -2$ b) $m = 1$ c) $m \in R$ d) $m \in \varnothing$.

6 Cho (d) : $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$. Gọi φ là góc của d và x'Ox thì cosφ bằng :

a) $-\dfrac{1}{\sqrt{14}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{14}}$ c) $\dfrac{3}{\sqrt{14}}$ d) $\dfrac{2}{\sqrt{14}}$.

7 Cho (D) : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 \end{cases}$ và (P) : $y + z + 1 = 0$.

Gọi φ là góc của d và (P) thì φ bằng :

a) 60^0 b) -60^0 c) 30^0 d) -30^0.

8 Cho mp (α) : $x + 2y + z = 5 = 0$ và (d) : $\dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$.

Gọi φ là góc của d và (α) thì :

a) $\varphi = -30^0$ b) $\varphi = 30^0$ c) $\varphi = 60^0$ d) $\varphi = 150^0$.

9 Cho A(2, 3, 2); B(6, –1, –2); C(–1, –4, 3); D(1, 6, –5). Gọi α là góc của 2 đường thẳng AB và CD thì :

a) $\alpha = 90^0$ b) $\alpha = -90^0$ c) $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$ d) $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

10 Cho d_1 : $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$ và d_2 : $\begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y - 12 = 0 \end{cases}$.

d_1, d_2 cắt mp(Oxy) tại A và B thì diện tích ΔOAB bằng :

a) $\dfrac{11}{2}$ b) $\dfrac{5}{2}$ c) 5 d) $\dfrac{25}{2}$.

11 Cho họ đường thẳng (d_k) : $\begin{cases} x - z\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \\ y - z\cos\alpha - \sin\alpha = 0 \end{cases}$.

Kết luận nào sau đây là đúng :

a) Vectơ chỉ phương của (d_k) có độ dài không đổi.

b) (d_k) tạo trục z'Oz góc 45^0.

c) Hai kết luận a, b đều đúng　　　d) Hai kết luận a, b đều sai.

12 Cho (d) : $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$. Gọi A và B là giao điểm (d) và mp (Oyz), mp (Oxz) thì diện tích ΔOAB bằng :

a) $\sqrt{6}$　　b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　c) $\sqrt{3}$　　d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13 Cho mp(α) : $x + y + z - 1 = 0$ cắt các trục tọa độ tại A, B, C và (d) : $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ cắt mp (Oxy) tại D thì thể tích tứ diện ABCD bằng :

a) $\frac{1}{6}$　　b) $\frac{1}{3}$　　c) $\frac{2}{3}$　　d) $\frac{1}{2}$.

14 Cho I(1, 3, 4); A(2, 0, 0). Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng OA bằng :

a) -5　　b) 5　　c) ± 5　　d) $\frac{5}{2}$.

15 Cho đường thẳng (d) : $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$ thì khoảng cách từ O đến (d) bằng :

$\frac{\sqrt{5}}{3}$　　c) $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　d) $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

16 Cho M(−1, 1, 0); N(1, 0, 2). Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng MN bằng :

a) 1　　b) −1　　c) ±1　　d) 2.

17 Cho (d) : $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}$. Điểm M trên d mà khoảng cách từ M đến mp(Oyz) bằng 1 thì :

a) M(1, 2, 0)　　　b) M(−1, 1, 3)

c) Hai kết quả a, b đều đúng　　　d) Hai kết quả a, b đều sai.

18 Phương trình mặt phẳng qua O(0, 0, 0) và chứa (d) : $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ là :

a) $2x + y - z + 1 = 0$ b) $2x + y - z = 0$

c) $2x - y + z + 3 = 0$ d) $x + 2y - z = 0$.

19 Mặt phẳng qua M(1, −1, 0) và chứa (d) : $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ có pháp vectơ là :

a) $\vec{n} = (0, 1, 1)$ b) $\vec{n} = (1, 0, -1)$

c) $\vec{n} = (0, 1, -1)$ d) $\vec{n} = (1, 0, 1)$.

20 Cho (d) : $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-3}$ và (α) : $x - y - z + 1 = 0$.

Gọi (Δ) là đường thẳng song song mp(α) và vuông góc (d) thì (Δ) có vectơ chỉ phương là :

a) $\vec{a} = (2, 5, -3)$ b) $\vec{a} = (2, 5, 3)$

c) $\vec{a} = (2, -5, -3)$ d) $\vec{a} = (2, 5, 1)$.

21 Cho d_1 : $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{4}$ và d_2 : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

Mặt phẳng chứa d_1 và // d_2 có phương trình là :

a) $2x + z = 0$ b) $2x - z + 1 = 0$

c) $2x + z + 1 = 0$ d) $2x - z = 0$.

22 Cho A(1, −1, 2). Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng OA lên mp(Oyz) là :

a) $\begin{cases} 2y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + z = 0 \\ x = 0. \end{cases}$

23 Cho họ đường thẳng (d_k) : $\begin{cases} x + kz - k = 0 \\ (1 - k)x - ky = 0 \end{cases}$ thì d_k luôn qua điểm cố định là :

a) (0, 0, 1) b) (0, 0, −1) c) (1, 0, 1) d) (1, 0, 0).

- ***Cho (d) :*** $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{1}$.

Hãy trả lời các câu hỏi 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

24 Khoảng cách từ O(0, 0, 0) đến (d) là :

a) $\frac{5}{3}\sqrt{5}$ b) $-\frac{5}{3}\sqrt{5}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{5}{3}\sqrt{2}$.

$\boxed{25}$ Hình chiếu vuông góc của (d) lên mp(Oxy) là :

a) $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ d) $x - y - 3 = 0$.

$\boxed{26}$ Hình chiếu vuông góc của (d) lên mp(Oyz) là :

a) $y - 2z + 8 = 0$ b) $\begin{cases} x = 0 \\ y - 2z + 8 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 0 \\ y - 2z + 8 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} z = 0 \\ y - 2z + 8 = 0 \end{cases}$.

$\boxed{27}$ Hình chiếu vuông góc của (d) lên mp(Oxz) là :

a) $x - 2z + 5 = 0$ b) $\begin{cases} x - 2z + 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2z + 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 2z + 5 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

$\boxed{28}$ Hình chiếu của (d) theo phương x'Ox lên mp(α) : $x + y + z + 1 = 0$ là :

a) $\begin{cases} y - 2z - 8 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$ b) $y - 2z - 8 = 0$

c) $\begin{cases} y - 2z + 8 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$ d) $y + 2z + 8 = 0$.

$\boxed{29}$ Hình chiếu của (d) theo phương y'Oy lên mp(α) : $x + y + z + 1 = 0$ là :

a) $x + 2z + 5 = 0$ b) $x - 2z + 5 = 0$

c) $\begin{cases} x + 2z + 5 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 2z + 5 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$.

$\boxed{30}$ Hình chiếu của (d) theo phương z'Oz lên mp(α) : $x + y + z + 1 = 0$ là :

a) $x - y - 3 = 0$ b) $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$

c) $x + y + 3 = 0$ d) $\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$.

TRẢ LỜI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

$\boxed{1}$ AB qua A(0, 1, 2), VTCP $\overrightarrow{BA} = (1, 1, 1)$.

Phương trình chính tắc : $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{1}$

Phương trình tổng quát : $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$. Chọn b.

2 (d) : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$

Giao điểm (d) và mp(Oxy) cho $z = 0 \Rightarrow t = 1$ **Vậy $A(2, 3, 0)$.**

Giao điểm (d) và mp(Oxy) cho $x = 0 \Rightarrow t = -1$ **Vậy $B(0, 1, 2)$.**

Giao điểm (d) và mp(Oxy) cho $y = 0 \Rightarrow t = -2$ **Vậy $C(-1, 0, 3)$.**

Chọn b.

3 $\vec{n}_1 = (3, -1, 2)$; $\vec{n}_2 = (1, 3, -2)$

$\Rightarrow$ VTCP $\vec{a}_d = (-4, 8, 10) = -2(2, -4, -5)$. **Chọn d.**

4 Cho A(1, 2. 0); B(0, 4, 0); C(0, 0, 3).

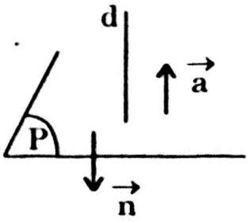
$\overrightarrow{AB} = (1, 2, 0)$; $\overrightarrow{AC} = (-1, -2, 3)$

$\Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (6, 3, 4)$

(d) $\perp$ mp(ABC) $\Rightarrow \vec{a}_d = \vec{n}$

Phương trình chính tắc (d) $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}$. Chọn d.

5 (d) có VTCP $\vec{a} = (1, -1, -1)$



(P) có PVT $\vec{n} = (2, m, 1)$

(d) $\perp$ (P) $\Leftrightarrow \vec{a} \,//\, \vec{n} \Leftrightarrow \dfrac{2}{1} = \dfrac{m}{-1} = \dfrac{1}{-1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 1 \end{cases}$ vô nghiệm. **Chọn d.**

6 (d) có VTCP $\vec{a} = (-1, 2, 3)$

x'Ox có VTCP $\vec{i} = (1, 0, 0)$

$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{i}|}{|\vec{a}|\,|\vec{i}|} = \dfrac{|-1|}{\sqrt{14}}$. Chọn b.

$\boxed{7}$ (d) có VTCP $\vec{a} = (1, -1, 0)$

(P) có PVT $\vec{n} = (0, 1, 1)$

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{a}.\vec{n}|}{|\vec{a}|\,|\vec{n}|} = \frac{|-1|}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 30^0. \quad \text{Chọn c.}$$

$\boxed{8}$ (α) có PVT $\vec{n} = (1, 2, 1)$

(d) có VTCP $\vec{a} = (-2, -1, 1)$

Ta có $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{n}.\vec{a}|}{|\vec{n}|\,|\vec{a}|} = \dfrac{|-2-2+1|}{\sqrt{1+4+1}.\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{|-3|}{6} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 30^0$

Chọn b.

$\boxed{9}$ Ta có $\overrightarrow{AB} = (4, -4, -4) = 4(1, -1, -1)$

$\overrightarrow{CD} = (2, 10, -8) = 2(1, 5, -4)$

$$\cos\alpha = \frac{|1-5+4|}{\sqrt{3}.\sqrt{32}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90^0. \quad \text{Chọn a.}$$

Chú ý : $0 \le \alpha \le 90^0$.

$\boxed{10}$ Cho $z = 0 \Rightarrow \quad (d_1) : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad$ A [illegible], $-3, 0)$

Cho $z = 0$, phương trình $(d_2) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 3y = 12 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B(-3, 5, 0)$

Ta có $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (0, 0, 11)$

Vậy dt $(\Delta OAB) = \dfrac{11}{2}$. Chọn a.

$\boxed{11}$ d_k có VTCP $\vec{a} = (\sin\alpha, \cos\alpha, 1)$

Ta có $|\vec{a}| = \sqrt{2} \quad \rightarrow$ a đúng.

z'Oz có VTCP $\vec{k} = (0, 0, 1)$

Ta có $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{a}.\vec{k}|}{|\vec{a}|\,|\vec{k}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 45^0 \rightarrow$ b đúng.

Vậy chọn c.

12 $(d): \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{1}$

Mp(Oyz) có phương trình $x = 0$ $\Rightarrow$ Giao điểm $A(0, 1, -1)$

Mp(Oxz) có phương trình $y = 0$ $\Rightarrow$ Giao điểm $B(-1, 0, -2)$

$$\text{Dt}\,(\Delta OAB) = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}.\ \text{Chọn b.}$$

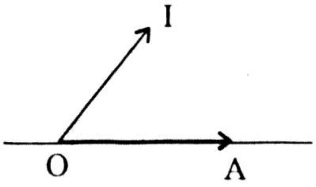
13 Ta có : $A(1, 0, 0)$; $B(0, 1, 0)$; $C(0, 0, 1)$; $D(1, 1, 0)$.

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0);\quad \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$$

$$\Rightarrow\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (1, 1, 1) \text{ và } \overrightarrow{AD} = (0, 1, 0)$$

$$\Rightarrow\ V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}.\ \text{Chọn a.}$$

14 Ta có $\overrightarrow{OI} = (1, 3, 4)$



$$\overrightarrow{OA} = (2, 0, 0)$$

$$\Rightarrow\ \left[\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}\right] = (0, 8, -6)$$

$$\Rightarrow\ \delta(I, OA) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}\right]\right|}{OA} = \frac{\sqrt{64 + 36}}{2} = 5.\quad \text{Chọn b.}$$

15 (d) qua $M(0, 1, 0)$, VTCP $\vec{a} = (1, 2, 2)$

Ta có $\overrightarrow{OM} = (0, 1, 0)$ $\Rightarrow$ $\left[\vec{a}, \overrightarrow{OM}\right] = (-2, 0, 1)$

$$\Rightarrow\ \delta(O, d) = \frac{\sqrt{4 + 1}}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.\quad \text{Chọn c.}$$

16 $\overrightarrow{MN} = (2, -1, 2)$

$\overrightarrow{ON} = (1, 0, 2)$

$$\Rightarrow\ \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{ON}\right] = (-2, -2, 1)$$

$$\Rightarrow\ d = \frac{\sqrt{4 + 4 + 1}}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 1.\ \text{Chọn a.}$$

17 $M(1 - 2t, 2 - t, 3t) \in d$, phương trình mp(Oyz) : $x = 0$

$\delta(M, \text{mp}(Oyz)) = 1 \Leftrightarrow |1 - 2t| = 1 \Leftrightarrow 1 - 2t = \pm 1$

$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 1$

Vậy chọn c.

$\boxed{18}$ Phương trình mp chứa (d) dạng $(x + y - 1) + m(x - z + 1) = 0$

$O \in \alpha \quad \Rightarrow \quad -1 + m = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 1$

Phương trình mặt phẳng : $2x + y - z = 0$. Chọn b.

Chú ý : $O \in \alpha \Rightarrow D = 0$ loại bỏ liền a và c.

$\boxed{19}$ (d) qua $A(0, 0, 1)$, VTCP $\vec{a} = (2, 1, 1)$

Mp(M, d) có VTCP $\vec{a}$ và $\overrightarrow{AM} = (1, -1, -1)$

$\Rightarrow$ PVT $\vec{n} = [\vec{a}, \overrightarrow{AM}] = (0, 3, -3) = 3(0, 1, -1)$. Chọn c.

$\boxed{20}$ Gọi $\vec{a}$ là VTCP của (Δ)

Do $\Delta \parallel (\alpha) \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{n}_\alpha = (1, -1, -1)$

$\Delta \perp (d) \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}_d = (2, 1, 3)$

Vậy $\vec{a} = [\vec{n}, \vec{b}] = (-2, -5, 3) = -(2, 5, -3)$. Chọn a.

$\boxed{21}$ d_1 có VTCP $\vec{a} = (2, 3, 4)$

d_2 có VTCP $\vec{b} = (1, 1, 2)$

Vậy PVT $\vec{n}_\alpha = [\vec{a}, \vec{b}] = (2, 0, -1)$

Loại bỏ a, c.

$I(0, -2, 0) \in d_1$ và $I \in (\alpha)$

$\Rightarrow$ Pt (α) : $2(x - 0) + 0 - 1(z - 0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - z = 0$. Chọn d.

$\boxed{22}$ Loại bỏ liền a, c vì phương trình mp(Oyz), $x = 0$.

Gọi (β) là mp chứa OA và $\perp$ (Oyz)

(β) có VTCP $\overrightarrow{OA} = (1, -1, 2)$

$\vec{i} = (1, 0, 0)$

$\Rightarrow$ PVT $\vec{n} = (0, 2, 1)$

Phương trình (β) qua O : $2y + z = 0$. Chọn b.

$\boxed{23}$ $I(x, y, z)$ điểm cố định $\Leftrightarrow \begin{cases} x = k(1 - z) \\ x = k(x + y) \end{cases} \forall k$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z - 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Chọn a.

Chú ý : Có thể thay (0, 0, 1) vào phương trình d_k thấy luôn thỏa $\forall k$.

- (d) qua A(1, –2, 3) và có VTCP $\vec{a} = (2, 2, 1)$.

$\boxed{24}$ $\overrightarrow{OA} = (1, -2, 3)$

$\Rightarrow \quad [\overrightarrow{OA}, \vec{a}\,] = (-8, 5, 6)$

$$\Rightarrow \quad \delta(O, d) = \frac{\sqrt{64 + 25 + 36}}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{5}{3}\sqrt{5}.$$ Chọn a.

$\boxed{25}$ (α) là mp chứa (d) và vuông góc mp(Oxy)

(α) có VTCP $\vec{a}$ và $\vec{k} = (0, 0, 1)$

$\Rightarrow \quad$ PVT (α) là $[\vec{a}, \vec{k}\,] = 2(1, -1, 0)$

$\Rightarrow \quad$ PT (α) là $\quad 1(x - 1) - 1(y + 2) = 0$

PTHC $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Chọn c.

$\boxed{26}$ (β) là mp chứa (d) và vuông góc mp(Oyz)

(β) có VTCP $\vec{i} = (1, 0, 0)$ và $\vec{a} \quad \Rightarrow \quad$ PVT $[\vec{i}, \vec{a}\,] = (0, -1, 2)$

PT (β) : $\quad 0 - 1(y + 2) + 2(z - 3) = 0$

PTHC $\begin{cases} y - 2z + 8 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$. Chọn b.

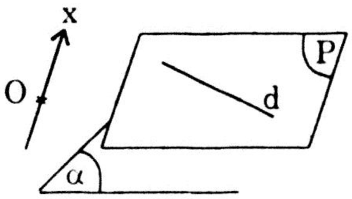
$\boxed{27}$ (γ) là mp chứa (d) và vuông góc mp(Oxz)

(γ) có VTCP $\vec{j} = (0, 1, 0)$ và $\vec{a} \quad \Rightarrow \quad$ PVT $[\vec{a}, \vec{j}\,] = -(1, 0, -2)$

PT (γ) : $1(x - 1) - 2(z - 3) = 0$

PTHC $\begin{cases} x - 2z + 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. Chọn c.

$\boxed{28}$ Gọi (P) là mp chứa (d) và // x'Ox



(P) có VTCP $\vec{a}$ và $\vec{i} = (1, 0, 0)$

$\Rightarrow \quad$ PVT $[\vec{i}, \vec{a}\,] = (0, -1, 2)$

PT (P) : $\quad 0(x - 1) - 1(y + 2) + 2(z - 3) = 0$

PTHC cần tìm $\begin{cases} -y + 2z + 8 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$. Chọn a.

29 Gọi (Q) là mp chứa (d) và // y'Oy

(Q) có VTCP $\vec{a}$ và $\vec{j} = (0, 1, 0)$ $\Rightarrow$ PVT $[\vec{a}, \vec{j}] = (-1, 0, 2)$

PT (Q) : $-1(x - 1) + 0(y + 2) + 2(z - 3) = 0$

PT đường thẳng cần tìm $\begin{cases} -x + 2z - 5 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$. Chọn d.

30 Gọi (R) là mp chứa (d) và // z'Oz

(R) có VTCP $\vec{a}$ và $\vec{k} = (0, 0, 1)$

$\Rightarrow$ PVT $[\vec{a}, \vec{k}] = 2(1, -1, 0)$

$\Rightarrow$ PT (R) : $1(x - 1) - 1(y + 2) + 0(z - 3) = 0$

PTHC $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$. Chọn b.

Bài 4

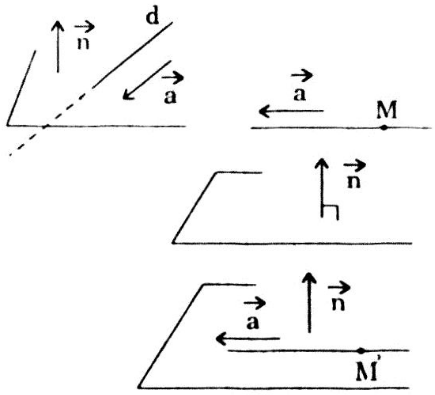
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

- ***Cách 1 :*** *Giả sử đường thẳng (d) qua* $M(x_0, y_0, z_0)$*; có vectơ chỉ phương* $\vec{a}_d$ *và mặt phẳng* (α) *có pháp vectơ* $\vec{n}_\alpha$

  * **(d) cắt (α)** $\Leftrightarrow$ $\vec{a}_d \cdot \vec{n}_\alpha \neq 0$

  * **(d) // (α)** $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \vec{a}_d \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \\ M \notin (\alpha) \end{cases}$

  * **(d) ⊂ (α)** $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \vec{a}_d \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \\ M \in (\alpha) \end{cases}$



- ***Cách 2 :*** *Giả sử phương trình mặt phẳng (α) là (1).*

  Và (2) là hệ phương trình biểu diễn phương trình của đường thẳng (d). ((2) có thể là phương trình tham số hay tổng quát của (d)).

  Giải hệ (1) (2).

  * *Nếu hệ (1) (2) có nghiệm duy nhất thì (d) cắt (α).*

  * *Nếu hệ (1) (2) vô nghiệm thì (d) // (α).*

  * *Nếu hệ (1) (2) vô số nghiệm thì (d) ⊂ (α).*

BÀI TẬP

Bài 1. *Tuyển sinh Đại học khối D 2002.*

Cho đường thẳng (d_m) : $\begin{cases} (2m + 1)x + (1 - m)y + m - 1 = 0 \\ mx + (2m + 1)z + 4m + 2 = 0 \end{cases}$

và mặt phẳng (P) : $2x - y + 2 = 0$.

Tìm m để (d_m) song song mặt phẳng (P).

GIẢI

Xét $\vec{n}_1 = (2m + 1, 1 - m, 0)$;

$\vec{n}_2 = (m, 0, 2m + 1)$

$\Rightarrow$ VTCP của (d_m) là $\vec{a} = (-2m^2 + m + 1, -(2m + 1)^2, m - m^2)$

$(d_m) // (P)$ $\Rightarrow$ $\vec{a}$ vuông góc PVT $\vec{n}_P = (2, -1, 0)$

$$\Rightarrow \quad 2(-2m^2 + m + 1) + (2m + 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 6m + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}$$

Thử lại : $m = -\frac{1}{2}$ thì $(d_m) \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

Rõ ràng $\vec{a}_d = (0, 0, -1) \perp \vec{n} = (2, -1, 0)$

và $M(0, 1, 0) \in d$ thì $M \notin (P)$. ■

Bài 2. *Tuyển sinh Đại học khối A 2005*

Cho d : $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng (α) : $2x + y - 2z + 9 = 0$.

a) Tìm I trên d sao cho khoảng cách từ I đến (α) bằng 2.

b) Tìm giao điểm A của (d) và (α). Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A, nằm trong (α) và vuông góc (d).

GIẢI

a) $I \in d$ nên $\exists t : I(1 - t, -3 + 2t, 3 + t)$

Ta có : $\delta(I, \alpha) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{|2(1 - t) + 2t - 3 - 2(t + 3) + 9|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 2$

$$\Leftrightarrow \quad |-2t + 2| = 6 \quad \Leftrightarrow \quad t = -2 \vee t = 4$$

Vậy I(3, –7, 1) hay I(–3, 5, 7).

b) Gọi $A = d \cap (\alpha)$

$A \in d \quad \Rightarrow \quad \exists t' : A(1 - t', -3 + 2t', 3 + t')$

$A \in (\alpha) \quad \Rightarrow \quad 2(1 - t') + (2t' - 3) - 2(3 + t') + 9 = 0$

$\Rightarrow \quad t' = 1$

Vậy A(0, –1, 4).

Gọi $\vec{b}$ là VTCP của (Δ)

Do $(\Delta) \subset (\alpha) \Rightarrow \vec{b} \perp \vec{n}_\alpha = (2, 1, -2)$

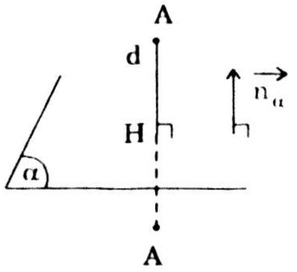
$(\Delta) \perp (d) \Rightarrow \vec{b} \perp \vec{a}_d = (-1, 2, 1)$

Vậy $\vec{b} = [\vec{n}_\alpha, \vec{a}_d] = 5(1, 0, 1)$

Phương trình (Δ) : $\dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y+1}{0} = \dfrac{z-4}{1}$. ■

Các dạng toán thường gặp

1. ***Tìm hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng (α) :***

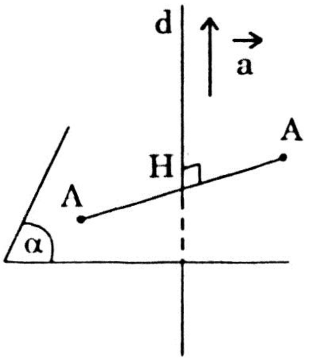


- Viết phương trình đường thẳng (d) qua A và vuông góc mặt phẳng (α).
- Tìm giao điểm của (d) và (α). Đó chính là hình chiếu H của A lên (α).

2. ***Tìm điểm A' đối xứng A qua mặt phẳng (α) :***

- Tìm hình chiếu H của A lên (α) (như trên).
- A' đối xứng A qua α $\Rightarrow$ H trung điểm AA'. Từ đó tìm tọa độ A'.

3. ***Tìm hình chiếu của A lên đường thẳng (d) :***



- Viết phương trình mặt phẳng (α) qua A và $\perp$ (d).
- Tìm giao điểm H của (d) và (α). Đó chính là hình chiếu của A lên (d).

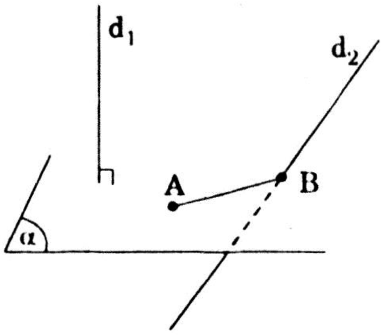
4. ***Tìm điểm A' đối xứng của A qua (d) :***

- Tìm tọa độ hình chiếu H của A lên (d) (như trên).
- A và A' đối xứng qua (d) thì H là trung điểm AA'. Từ đó tìm được A'.

5. ***Viết phương trình đường thẳng qua A, vuông góc d_1 và cắt d_2***

- ***Cách 1 :***

- Viết phương trình mặt phẳng α qua A và vuông góc d_1.
- Tìm giao điểm B của d_2 và (α).
- Đường thẳng cần tìm chính là đường thẳng qua A và B.



- ***Cách 2 :***

- Viết phương trình mặt phẳng (α) qua A và $\perp$ d_1.
- Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa A và d_2.
- Đường thẳng cần tìm là giao tuyến của (α) và (β).

Bài 3. Cho mặt phẳng (P) có phương trình : $x - 2y - 3z + 14 = 0$ và M(1, –1, 1).

a) Viết phương trình mặt phẳng qua M và song song mặt phẳng (P).

b) Tìm tọa độ hình chiếu H của M trên (P).

c) Tìm tọa độ điểm N đối xứng M qua mặt phẳng (P).

GIẢI

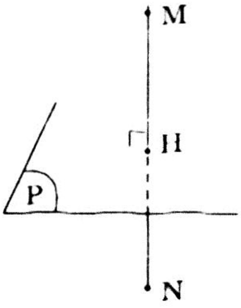
a) Mặt phẳng song song (P) nên có pháp vectơ $\vec{n} = (1, -2, -3)$.

Phương trình mặt phẳng qua M là :

$$1(x-1) - 2(y+1) - 3(z-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2y - 3z = 0.$$

b) Phương trình đường thẳng qua M và ⊥ (P) :

$$(d) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$



Thay vào phương trình mặt phẳng (P) ta được :

$$(1 + t) - 2(-1 - 2t) - 3(1 - 3t) + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 14t + 14 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -1.$$

Thay vào phương trình (d), ta được hình chiếu H của M lên (P) là H(0, 1, 4).

c) N đối xứng với M qua (P) nên H là trung điểm MN.

Do đó $\begin{cases} x_N = 2x_H - x_M = 0 - 1 = -1 \\ y_N = 2y_H - y_M = 2 + 1 = 3 \\ z_N = 2z_H - z_M = 8 - 1 = 7 \end{cases}$

Vậy N(−1, 3, 7). ■

Bài 4. Cho A(1, 2, −1) và đường thẳng (D) : $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng (P) có phương trình : $2x + y - z + 1 = 0$.

a) Tìm điểm B đối xứng A qua mặt phẳng (P).

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua A, cắt (D) và song song mặt phẳng (P).

GIẢI

a) Phương trình tham số đường thẳng (d) qua A và ⊥ (P) là : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$

Thay vào phương trình mặt phẳng (P) ta được t = −1.

Vậy (d) cắt (P) tại H(−1, 1, 0).

Do B đối xứng A qua (P) $\Rightarrow$ H là trung điểm AB.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_H - x_A = -2 - 1 = -3 \\ y_B = 2y_H - y_A = 2 - 2 = 0 \\ z_B = 2z_H - z_A = 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

Vậy B(−3, 0, 1).

b) Gọi I là giao điểm của đường thẳng cần tìm và (D).

Do I $\in$ (D) nên $\exists t_0$ để $I(2 + t_0, 3t_0, -2 + 2t_0)$.

Vậy $\overrightarrow{AI} = (1 + t_0, 3t_0 - 2, -1 + 2t_0)$

Do đường thẳng cần tìm AI // (P) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{n_P}$

$$\Rightarrow \quad 2(1 + t_0) + 1(3t_0 - 2) - 1(-1 + 2t_0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3t_0 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = -\frac{1}{3}.$$

Phương trình chính tắc của đường thẳng cần tìm qua A và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AI} = \left(\frac{2}{3}, -3, -\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3}(2, -9, -5)$ là :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-9} = \frac{z+1}{-5}. \quad ■$$

Bài 5. Cho M(1, 2, –1) và đường thẳng (d) : $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{2}$.

Gọi N là điểm đối xứng của M qua (d). Tính MN.

GIẢI

Gọi (α) là mặt phẳng qua M và $\perp$ (d) nên (α) nhận $\overrightarrow{a_d} = (3, -2, 2)$ là pháp vectơ.

Phương trình mặt phẳng (α) là :

$$3(x - 1) - 2(y - 2) + 2(z + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2y + 2z + 3 = 0$$

Phương trình tham số đường thẳng (d) : $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

Thay vào phương trình mặt phẳng (α) ta được :

$$3(-1 + 3t) - 2(2 - 2t) + 2(2 + 2t) + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0.$$

Vậy (d) cắt (α) tại H(–1, 2, 2).

M, N đối xứng qua (d) $\Rightarrow$ HM = HN

$$\Rightarrow \quad MN = 2HM = 2\sqrt{4+0+9} = 2\sqrt{13}. \quad ■$$

Bài 6. Cho mặt phẳng (P) : $2x + 5y + z + 17 = 0$

và đường thẳng (D) : $\begin{cases} 3x - y + 4z - 27 = 0 \\ 6x + 3y - z + 7 = 0 \end{cases}$

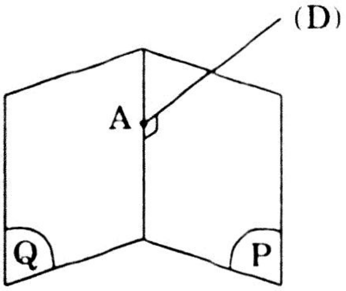
1. Xác định giao điểm A của (D) và (P).

2. Viết phương trình đường thẳng qua A, vuông góc (D) và nằm trong mặt phẳng (P).

GIẢI

1. Tọa độ giao điểm A là nghiệm hệ phương trình :

$$\begin{cases}2x+5y+z+17=0\\3x-y+4z=27\\6x+3y-z=-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-5\\z=4\end{cases}$$



Vậy A(2, –5, 4).

2. Gọi (Q) là mặt phẳng vuông góc (D) và qua A.

Xét (D) ta có : $\vec{n_1}=(3,-1,4)$; $\vec{n_2}=(6,3,-1)$.

Vậy vectơ chỉ phương của (D) là $\vec{a}=(-11,27,15)$.

Phương trình mặt phẳng (Q) qua A và nhận $\vec{a}$ là pháp vectơ

$$-11(x-2)+27(y+5)+15(z-4)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad 11x-27y-15z-97=0$$

Do đó đường thẳng cần tìm là giao tuyến 2 mặt phẳng (P) và (Q)

$$\begin{cases}2x+5y+z+17=0\\11x-27y-15z-97=0.\end{cases}$$ ■

Bài 7. *Tuyển sinh ĐH khối A 2002*

Cho $(\Delta_1):\begin{cases}x-2y+z-4=0\\x+2y-2z+4=0\end{cases}$ và $(\Delta_2):\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=1+2t\end{cases}$

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ_1 và song song Δ_2.

b) Cho M(2, 1, 4). Tìm $H\in\Delta_2$ sao cho MH ngắn nhất.

GIẢI

a) (Δ_1) qua A(0, –2, 0) và có VTCP $\vec{a}=(2,3,4)$

(Δ_2) qua B(1, 2, 1) và có VTCP $\vec{b}=(1,1,2)$

Mặt phẳng (P) có PVT $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]=(2,0,-1)$

Phương trình mp(P) qua A là : $2(x-0)+0(y+2)-1(z-0)=0$

$$\Leftrightarrow\quad 2x-z=0$$

b) $H\in\Delta_2$ nên $\exists t: H(1+t,2+t,1+2t)$

$$MH_{\min}\Leftrightarrow MH\perp\Delta_2$$

$$\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{MH}=(t-1;t+1;2t-3)\perp\vec{b}=(1;1;2)$$

$$\Leftrightarrow\quad 1(t-1)+1(t+1)+2(2t-3)=0\quad\Leftrightarrow\quad t=1.$$

Vậy $MH_{\min}\Leftrightarrow H(2,3,3)$. ■

Bài 8. *Dự bị khối D 2004*

Cho A(2, 0, 0); B(2, 2, 0); S(0, 0, m).

a) Khi m = 2 tìm C đối xứng của O qua mp(SAB).

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên SA. Chứng minh diện tích ΔOBH bé hơn 2 với mọi m.

GIẢI

a) Khi m = 2 thì $\overrightarrow{SA} = (2, 0, -2)$; $\overrightarrow{SB} = (2, 2, -2)$

$\Rightarrow$ PVT $\vec{n} = [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}] = 4(1, 0, 1)$

Phương trình mp(SAB) :

$$1(x-2) + 0 + 1(y-0) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$$

Phương trình d qua O và $\perp$ mp(SAB) : $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

Gọi $I = d \cap (SAB)$

$I \in d \Rightarrow I(t, 0, t)$

$I \in (SAB) \Rightarrow 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Vậy I(1, 0, 1).

O và C đối xứng qua mp(SAB) nên I trung điểm OC.

Vậy $\begin{cases} x_C = 2x_I - x_O = 2 \\ y_C = 2y_I - y_O = 0 \\ z_C - 2z_I - z_O = 2 \end{cases}$

Do đó C(2, 0, 2).

b) Phương trình tham số (SA) $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 0 \\ z = 0 + mt \end{cases}$

Vì $OH \perp SA$, $H \in SA \Rightarrow H(2 - 2t, 0, mt)$

$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{SA} = (-2, 0, m)$ nên $-2(2 - 2t) + m^2t = 0 \Rightarrow t = \dfrac{4}{m^2 + 4}$

Vậy $H\left(\dfrac{2m^2}{m^2+4}, 0, \dfrac{4m}{m^2+4}\right)$

Ta có $[\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OB}] = \dfrac{4m}{4+m^2}(-2, 2, m)$

$$\text{Dt}(\Delta OBH) = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OB}]\right| = 2\sqrt{\frac{m^4 + 8m^2}{m^4 + 8m^2 + 16}} < 2\ \forall m. \ ■$$

Bài 9. Cho đường thẳng (d) : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}$ và mặt phẳng (P) : $2x - y - 2z + 1 = 0$.

a) Tìm tọa độ các điểm thuộc (d) sao cho khoảng cách từ mỗi điểm đó đến mặt phẳng (P) bằng 3.

b) Gọi K là điểm đối xứng của I(2, –1, 3) qua đường thẳng (d). Hãy xác định tọa độ điểm K.

GIẢI

a) Gọi $M \in (d)$ nên $\exists t \in \mathbb{R} : M(1 + 2t, 2 - t, 3t)$

Ta có : $\delta(M, P) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{|2(1 + 2t) - 2 + t - 2(3t) + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 3$

$$\Leftrightarrow |-t + 1| = 9$$

$$\Leftrightarrow -t + 1 = \pm 9 \Leftrightarrow t = -8 \vee t = 10.$$

Vậy $M_1(21, -8, 30)$ hay $M_2(-15, 10, -24)$.

b) Phương trình mặt phẳng qua I và ⊥ (d) :

$$2(x - 2) - 1(y + 1) + 3(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 3z - 14 = 0 \ (\alpha)$$

Thay x, y, z của (d) vào phương trình (α) ta có :

$$2(1 + 2t) - 2 + t + 3(3t) - 14 = 0 \Leftrightarrow 14t - 14 = 0$$
$$\Leftrightarrow t = 1$$

Do đó (d) cắt (α) tại H(3, 1, 3).

H là trung điểm KI $\Rightarrow \begin{cases} x_K = 2x_H - x_I = 6 - 2 = 4 \\ y_K = 2y_H - y_I = 2 + 1 = 3 \\ z_K = 2z_H - z_I = 6 - 3 = 3 \end{cases}$

Vậy K(4, 3, 3). ■

Bài 10. Lập phương trình đường thẳng qua A(0, 1, 1) vuông góc

$(d_1) : \dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{y + 2}{1} = \dfrac{z}{1}$ và cắt $(d_2) : \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$

GIẢI

Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc (d_1) là :

$$3(x - 0) + 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + y + z - 2 = 0 \quad (\alpha)$$

- ***Cách 1*** **:** Tọa độ giao điểm B của (d_2) và (α) là nghiệm hệ phương trình :

$\begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ x + y - z = -2 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ Vậy B(–1, 2, 3).

Đường thẳng cần tìm chính là (AB) : $\frac{x-0}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$.

- ***Cách 2*** : Phương trình mặt phẳng (β) chứa (d_2) nên có dạng :

$$m(x + y - z + 2) + n(x + 1) = 0 \quad (m^2 + n^2 \neq 0)$$

Do $A \in (\beta)$ nên $2m + n = 0$

Chọn $n = 2$ và $m = -1$

Vậy phương trình (β) là : $x - y + z = 0$

Đường thẳng cần tìm chính là giao tuyến của (α) và (β) có phương trình

$$\begin{cases} 3x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$ ■

Bài 11. *Tuyển sinh khối D 2006*

Cho A(1, 2, 3); $d_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và $d_2 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$.

a) Tìm A' đối xứng A qua d_1.

b) Viết phương trình đường thẳng Δ qua A, vuông góc d_1 và cắt d_2.

GIẢI

a) PT tham số (d_1) $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Vẽ $AH \perp d_1$.

$H \in d_1$ nên $\exists t \in R : H(2 + 2t, -2 - t, 3 + t)$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AH} = (1 + 2t, -t - 4, t)$

Do $AH \perp d_1$ nên $\overrightarrow{AH} \perp \vec{a} = (2, -1, 1) \quad \Rightarrow \quad 2(1 + 2t) + t + 4 + t = 0$

$\Rightarrow \quad 6t + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1$

Vậy H(0, −1, 2)

A và A' đối xứng qua d_1 nên H là trung điểm AA' :

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = 0 - 1 = -1 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = -2 - 2 = -4 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = 4 - 3 = 1 \end{cases}$$

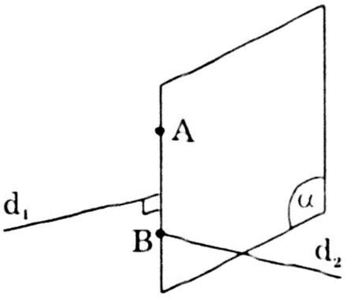
Vậy A'(−1, −4, 1).

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua A vuông góc (d_1) phương trình (α) là :

$$2(x - 1) - 1(y - 2) + 1(z - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x - y + z - 3 = 0$$

Gọi B là giao điểm (d_2) và (α)



$B \in d_2 \quad \Rightarrow \quad \exists u : B(1 - u, 1 + 2u, -1 + u)$

$B \in (\alpha) \quad \Rightarrow \quad 2(1 - u) - 1 - 2u - 1 + u - 3 = 0$

$\Rightarrow \quad -3u - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -1.$

Vậy B(2, –1, –2).

Đường thẳng (Δ) chính là đường thẳng AB phương trình (Δ) :

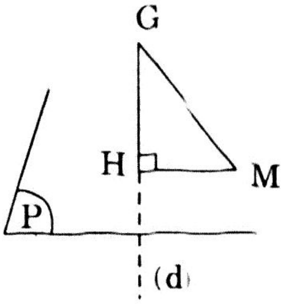
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}. \quad ■$$

Bài 12*. Cho A(1, 4, 5); B(0, 3, 1); C(2, –1, 0) và (P) : $3x - 3y - 2z - 15 = 0$.

Gọi G là trọng tâm ΔABC và M nằm trên mp(P).

Chứng minh $(MA^2 + MB^2 + MC^2)$ ngắn nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của G trên mặt phẳng (P). Xác định tọa độ điểm M đó.

GIẢI



Ta có : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$

$\Rightarrow \quad MA^2 = MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}$

Tương tự $MB^2 = MG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}$

$MC^2 = MG^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}$

Vậy $MA^2 + MB^2 + MC^2 =$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}(\underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}_{\vec{0}})$$

$$= GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3HG^2$$

với H hình chiếu vuông góc của G trên mặt phẳng (P).

Do đó $MA^2 + MB^2 + MC^2$ ngắn nhất $\Leftrightarrow$ $M \equiv H$.

Ta có G(1, 2, 2).

Phương trình đường thẳng (d) qua G và vuông góc mặt phẳng (P) :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Thay vào phương trình mặt phẳng (P) ta được :

$$3(1 + 3t) - 3(2 - 3t) - 2(2 - 2t) - 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1.$$

Vậy lúc đó M(4, –1, 0). ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. Cho $(\alpha): 2x + y + z - 1 = 0$ và $(d): \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$.

a) Tính số đo góc nhọn tạo bởi (d) và (α).

b) Tìm tọa độ A là giao điểm (d) và (α).

c) Viết phương trình tổng quát đường thẳng (Δ) qua A, vuông góc (d) và nằm trong α.

BT2. Cho mặt phẳng (P) đi qua A(0, 0, 1); B(–1, –2, 0); C(2, 1, –1).

1. Viết phương trình tổng quát mặt phẳng (P).

2. Viết phương trình tham số đường thẳng (d) qua trọng tâm ΔABC và vuông góc mặt phẳng (P).

3. Xác định chân đường cao hạ từ A xuống BC. Tính thể tích tứ diện OABC.

BT3. Cho mặt phẳng $(P): 2x + \lambda y + z - 5 = 0$

và đường thẳng $(d): \begin{cases} 3x + y + 2z - 4 = 0 \\ x - y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$.

Tìm λ sao cho : **a)** (d) // (P) **b)** (d) $\perp$ (P).

BT4. Cho mặt phẳng $(P): x - 2y - 3z + 14 = 0$ và M(1, –1, 1).

a) Viết phương trình mặt phẳng qua M và song song mặt phẳng (P).

b) Tìm tọa độ hình chiếu H của M trên (P).

c) Hãy tìm tọa độ N đối xứng với M qua (P).

BT5. Cho mặt phẳng $(P): 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

a) Tìm hình chiếu của điểm A(0, 0, 1) lên mặt phẳng (P).

b) Tìm A' đối xứng với A qua (P).

BT6. Cho A(–1, 3, 2); B(4, 0, –3); C(5, –1, 4); D(0, 6, 1).

a) Viết phương trình tham số đường thẳng BC. Hạ AH $\perp$ BC. Tìm tọa độ H.

b) Viết phương trình mặt phẳng (DBC). Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (DBC).

BT7. Cho đường thẳng $(\Delta): \dfrac{x+3}{-3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-6}{1}$.

Tìm hình chiếu vuông góc của điểm A(2, 1, –1) trên (Δ).

BT8. Cho đường thẳng $(\Delta): \begin{cases} y + z - 4 = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$ và A(2, –1, 1).

a) Viết phương trình mặt phẳng (α) qua A và vuông góc (Δ).

b) Tìm tọa độ điểm B đối xứng A qua (Δ).

BT9. Cho A(0, 0, 2); B(3, 0, 5); C(1, 1, 0); D(4, 1, 2).

a) Tính độ dài đường cao hạ từ D đến mặt phẳng (ABC).

b) Viết phương trình tham số đường cao trên. Tìm tọa độ hình chiếu của D lên mặt phẳng (ABC).

BT10*. Cho A(0, 0, –3); B(2, 0, –1) và (P) : $3x - 8y + 7z - 1 = 0$.

a) Tìm tọa độ giao điểm I của AB và (P).

b) Tìm C nằm trên mặt phẳng (P) sao cho ΔABC đều.

BT11. Cho mặt phẳng (α) : $2x + y + z - 2 = 0$ và đường thẳng (d) : $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$.

a) Tìm tọa độ giao điểm A của (d) và (α).

b) Viết phương trình đường thẳng (Δ) qua, vuông góc (d) và nằm trong (α).

BT12. Cho A(1, 2, –1); B(7, –2, 3) và đường thẳng (d) : $\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases}$

a) Chứng minh rằng (d) và AB cùng nằm trên 1 mặt phẳng.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và mặt phẳng trung trực của AB.

c) Tìm I $\in$ (d) sao cho chu vi ΔABI nhỏ nhất. Tính chu vi đó.

BT13. Với giá trị m nào thì đường thẳng $\begin{cases} 2mx + y - z + 1 = 0 \\ x - my + z - 1 = 0 \end{cases}$ nằm trên mặt phẳng Oyz.

Cho mặt phẳng (α) : $2x + y + z - 2 = 0$ và đường thẳng (d) : $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$.

Viết phương trình đường thẳng qua giao điểm của (d) với (α), nằm trên (α) và vuông góc (d).

BT14. Cho (α) : $4x + \alpha y + 6z - 10 = 0$; ($\beta$) : $bx - 12y - 12z + 4 = 0$.

a) Tìm a, b để α // β. Tính khoảng cách giữa 2 mặt phẳng này.

b) Giả sử a = b = 0. Tìm tọa độ hình chiếu H của A(1, 1, 1) lên giao tuyến *l* của α và β. Tính khoảng cách từ A đến *l*.

BT15. Cho họ đường thẳng (d_h) : $\begin{cases} 2kx + y - z + 1 = 0 \\ x - ky + z - 1 = 0 \end{cases}$.

Tìm k để đường thẳng d_h nằm trong mặt phẳng (Oyz).

BT16. Cho A(a, 0, 0); B(0, b, 0); C(0, 0, c) với a, b, c > 0.

a) Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

b) Xác định tọa độ H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (ABC). Tính OH và diện tích ΔABC.

c) Cho a, b, c thay đổi sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = k^2$ với k > 0 cho trước. Khi nào diện tích ΔABC lớn nhất. Chứng minh khi đó độ dài OH cũng lớn nhất.

BT17. *Đề Dự bị khối B 2005*

Cho M(5, 2, –3) và mp (P) : 2x + 2y – z. Tìm M_1 hình chiếu vuông góc của M lên mp (P). Viết phương trình mặt phẳng (Q), qua M và chứa (d).

$$(d) : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{-6}$$

BT18. *Dự bị khối A 2006*

Cho mp(α) : 3x + 2y – z + 4 = 0 và A(4, 0, 0); B(0, 4, 0). Gọi I là trung điểm AB.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng AB và α.

b) Tìm K sao cho KI vuông góc (α) và K cách đều O và mp(α).

BT19. *Dự bị Khối A 2004*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật có tâm O(0, 0, 0); A($-\sqrt{2}$, –1, 0); B($\sqrt{2}$, –1, 0); S(0, 0, 3).

a) Viết phương trình mặt phẳng qua trung điểm M của AB và song song với AD, SC.

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua B và vuông góc SC. Tính diện tích mặt cắt của (α) và hình chóp S.ABCD.

20 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

- ***Trong không gian (Oxyz) cho đường thẳng (Δ) :*** $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}$.

Hãy trả lời các câu hỏi 1, 2; 3, 4.

1 Xét mặt phẳng (P) : x + y + z + 2 = 0. Hãy chọn kết luận đúng.

a) Δ cắt (P) và không ⊥ (P)
b) Δ vuông góc (P)
c) Δ song song (P)
d) Δ nằm trong (P).

2 Xét mặt phẳng (Q) : 2x + 4y + z = 0. Hãy chọn kết luận đúng.

a) Δ cắt (Q) và không ⊥ (Q)
b) Δ vuông góc (Q)
c) Δ song song (Q)
d) Δ nằm trong (Q).

3 Xét mặt phẳng (R) : $x - y + 2z + 5 = 0$. Hãy chọn kết luận đúng.

a) Δ cắt (R) và không $\perp$ (R) b) Δ vuông góc (R)

c) Δ song song (R) d) Δ nằm trong (R).

4 Xét mặt phẳng (S) : $x - y + 2z - 5 = 0$. Hãy chọn kết luận đúng.

a) Δ cắt (S) và không $\perp$ (S) b) Δ vuông góc (S)

c) Δ song song (S) d) Δ nằm trong (S).

5 Cho mặt phẳng (α) : $2y + z = 0$. Hãy chọn kết luận đúng.

a) α // x'Ox b) α // y'Oy c) α // yOz d) α chứa Ox.

6 Cho đường thẳng a : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và mp(α) : $x + 3y + z + 2 = 0$.

Trong các mệnh đề sai, tìm mệnh đề đúng :

a) d // α b) d cắt α c) $d \subset (\alpha)$ d) $d \perp (\alpha)$.

7 Cho mp(P) : $x + 2y - z + 5 = 0$ và đường thẳng d $\begin{cases} x = -3 + 1t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$ thì d cắt (P) tại :

a) I(−5, −2, 2) b) I(−5, −2, −2) c) I(−1, 0, 4) d) I(−1, 0, −4).

8 Giao điểm của d : $\dfrac{x - 12}{4} = \dfrac{y - 9}{3} = \dfrac{z - 1}{1}$ và (α) : $3x + 5y - z - 2 = 0$ là :

a) A(1, 0, 1) b) B(0, 0, −2) c) C(1, 1, 6) d) D(12, 9, 1).

9 (d_m) $\begin{cases} 2mx + y - z + 1 = 0 \\ x - my + z - 1 = 0 \end{cases}$ cắt mp(Oyz) khi và chỉ khi :

a) $m = 1$ b) $m \neq 1$ c) $m = 0$ d) $m \neq 0$.

10 Cho Δ : $\dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z - 2}{1}$. Hình chiếu vuông góc của M(2, 0, 1) lên Δ là :

a) N(1, 0, 2) b) H(2, 2, 3) c) K(0, −2, 1) d) L(−1, −4, 0).

11 Cho d : $\dfrac{x + 1}{3} = \dfrac{y - 2}{-2} = \dfrac{z - 2}{2}$ và A(1; 2; −1) thì hình chiếu vuông góc của A lên d là :

a) H(1, 2, 2) b) K(−1, 0, 3) c) M(−1, 2, 2) d) N(−2, 4, 4).

12 Cho M(5, 2, −3) và mp(α) : $2x + 2y - z + 1 = 0$. Hình chiếu vuông góc của M lên mp (α) là :

a) N(0, 1, 3) b) R(1, −2, −1) c) S(1, 2, 3) d) H(−1, 3, 2).

13 Cho M(2, 1, 4), lấy N $\in$ d $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t. \end{cases}$ thì MN ngắn nhất khi và chỉ khi :

a) $N_1(2, -3, -3)$ b) $N_2(2, 3, 3)$ c) $N_3(0, 1, -1)$ d) $N_4(0, 1, 1)$.

14 Cho (α) : $x - 2y - 3z + 14 = 0$ và A(1, −1, 1). Điểm đối xứng của A qua (α) là :

a) B(1, 3, 7) b) C(−1, −3, 7)

c) D(−1, 3, 7) d) E(1, −3, 7).

15 Cho M(1, 2, 3) và (Δ) : $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$ thì điểm đối xứng của M qua (Δ) là :

a) N(1, 4, −1) b) H(−1, −4, 1)

c) K(1, 4, 1) d) G(1, −4, −1).

16 Cho A(0, 0, −3); B(2, 0, −1) thì đường thẳng AB cắt mp(α) :

$3x - 8y + 7z + 1 = 0$ tại :

a) I(2, 0, 1) b) I(−2, 0, 1)

c) I(2, 0, −1) d) I(−2, 0, −1).

17 Cho mp(α) : $3x - 2y - z + 5 = 0$ và (Δ) : $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-3}{4}$. Gọi (β) là mặt phẳng chứa Δ và song song (α). Khoảng cách giữa (α) và (β) là :

a) $\dfrac{9}{14}$ b) $\dfrac{9}{\sqrt{14}}$ c) $\dfrac{3}{14}$ d) $\dfrac{3}{\sqrt{14}}$.

- ***Cho*** (d_1) : $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{1}$; (d_2) : $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$ ***và*** ***A(0, 1, 1).***

Hãy trả lời câu 18, 19, 20.

18 Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc (d_1) là :

a) $3x + y + z + 2 = 0$ b) $3x + y + z - 2 = 0$

c) $x + 3y + z - 2 = 0$ d) $x + y + 3z - 2 = 0$.

19 Giao điểm của d_1 và (α) của câu 18 là :

a) B(1, 2, 3) b) B(1, −2, 3) c) B(−1, 2, −3) d) B(−1, 2, 3).

20 Phương trình đường thẳng qua A vuông góc (d_1) và cắt (d_2) là :

a) $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ b) $\begin{cases} 3x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

c) Hai kết quả a, b đều đúng d) Hai kết quả a, b đều sai.

TRẢ LỜI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

- (Δ) qua A(1, 2, 3) có VTCP $\vec{a} = (2, 4, 1)$.

$\boxed{1}$ (P) có PVT $\vec{n} = (1, 1, 1)$.

Ta có : $\vec{a}.\vec{n} = 2 + 4 + 1 = 7 \neq 0$ và $\vec{a}$ không cùng phương $\vec{n}$.

Vậy (Δ) cắt (P) và không ⊥ (P). Chọn a.

$\boxed{2}$ (Q) có PVT $\vec{m} = (2, 4, 1)$.

Ta có : $\vec{a} = \vec{m}$. Vậy (Δ) vuông góc (Q). Chọn b.

$\boxed{3}$ (R) có PVT $\vec{n} = (1, -1, 2)$.

Ta có : $\vec{a}.\vec{n} = 2 - 4 + 2 = 0$ và $A(1, 2, 3) \notin (R)$ do $1 - 2 + 6 + 5 \neq 0$.

Vậy Δ // (R). Chọn c.

$\boxed{4}$ (S) có PVT $\vec{n} = (1, -1, 2)$.

Ta có : $\vec{a}.\vec{n} = 2 - 4 + 2 = 0$ và $A(1, 2, 3) \in (S) : 1 - 2 + 6 - 5 = 0$.

Vậy (Δ) nằm trong (S). Chọn d.

$\boxed{5}$ (α) có PVT $\vec{n} = (0, 2, 1)$.

Trục Ox có VTCP $\vec{a} = (1, 0, 0)$.

Ta có : $\vec{a}.\vec{n} = 0$ và $O \in Ox$ mà $O \in (\alpha)$.

Vậy Ox nằm trên mp(α). Chọn d.

$\boxed{6}$ (d) có VTCP $\vec{a} = (1, -1, 2)$ và qua A(1, 2, 1) α có PVT $\vec{n} = (1, 3, 1)$.

Ta có : $\vec{a}.\vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{n}$.

Mà $A \notin \alpha$ vì $1 + 6 + 1 + 1 \neq 0$.

Vậy d // α. Chọn a.

Cách khác : Xét phương trình : $(1 + t) + 3(2 - t) + (1 + 2t) + 1 = 0$

$$\Rightarrow 0t + 9 = 0 \text{ vô nghiệm}$$

Vậy d // (α).

$\boxed{7}$ Thay x, y, z của phương trình (d) vào phương trình (P) ta được :

$$(2t - 3) + 2(t - 1) - t - 3 + 5 = 0 \Leftrightarrow 3t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Vậy d cắt (P) tại I(–1, 0, 4). Chọn c.

$\boxed{8}$ Thay tọa độ B(0, 0, –2) vào phương trình (α) ta có : $0 + 2 - 2 = 0$

phương trình (d) ta có : $\frac{-12}{4} = \frac{-9}{3} = \frac{-3}{1}$

Vậy $B \in (d) \cap (\alpha)$. Chọn b.

$\boxed{9}$ (d_m) có VTCP $\vec{a} = (1 - m, -1 - 2m, -1 - 2m^2)$

Mp(Oyz) có PVT $\vec{i} = (1, 0, 0)$

(d) cắt mp(Oyz) $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\,.\,\vec{i} \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $m \neq 1$. Chọn b.

$\boxed{10}$ Ta thấy các điểm M, H, K, L đều nằm trên Δ.

Mặt khác : $\overrightarrow{MN} = (-1, 0, 1) \perp \vec{a}_\Delta = (1, 2, 1)$.

Vậy chọn a.

$\boxed{11}$ Trước tiên hình chiếu vuông góc phải nằm trên d.

Ta thấy chỉ có $M \in d$.

Mặt khác : $\overrightarrow{MA} = (2, 0, -3) \perp \vec{a}_d = (3, -2, 2)$.

Vậy chọn c.

$\boxed{12}$ Ta thấy chỉ có N và R nằm trên mp(α).

Mặt khác : $\overrightarrow{MN} = (-5, -1, 6) \not\parallel \vec{n} = (2, 2, -1)$

$\overrightarrow{MR} = (-4, -4, 2) \parallel \vec{n} = (2, 2, -1)$

Vậy hình chiếu của M là R. Chọn b.

$\boxed{13}$ $N(1 + t, 2 + t, 1 + 2t) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (t - 1, t + 1, 2t - 3)$

$MN \perp \vec{d} = (1, 1, 2) \Rightarrow t - 1 + t + 1 + 2(2t - 3) = 0$

$\Rightarrow t = 1$

Vậy N(2, 3, 3). Chọn b.

$\boxed{14}$ Ta chỉ có $\overrightarrow{AD} = (-2, 4, 6) = -2\vec{n}_\alpha$.

Vậy chỉ xét điểm D.

Mặt khác trung điểm AD là $I(0, 1, 4) \in \alpha$. Chọn c.

$\boxed{15}$ Ta có : $\overrightarrow{MN} = (0, 2, -4)$; $\overrightarrow{MH} = (-2, -6, -2)$; $\overrightarrow{MK} = (0, 2, -2)$

Xét VTCP $\vec{a}_d = (2, -1, 1)$.

Ta thấy chỉ có $\overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{a}$.

Mặt khác trung điểm $I(0, -1, 2) \in \Delta$.

Vậy chọn b.

16 Phương trình tham số AB $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -3 + t \end{cases}$

Thay vào phương trình (α) $\Rightarrow$ $3t + 0 + 7(t - 3) + 1 = 0$

$\Rightarrow$ $10t - 20 = 0$

$\Rightarrow$ $t = 2$.

Vậy giao điểm $I(2, 0, -1)$. Chọn c.

17 Δ qua $A(1, 7, 3)$.

$$\delta(\alpha, \beta) = \delta(A, \alpha) = \frac{|3 - 14 - 3 + 5|}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{|-9|}{\sqrt{14}}.$$ Chọn b.

18 (α) qua A và vuông (d_1) có phương trình :

$$3(x - 0) + 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + y + z - 2 = 0.$$

Chọn b.

19 Tọa độ B là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ x + y - z = -2 \\ x = -1 \end{cases}$

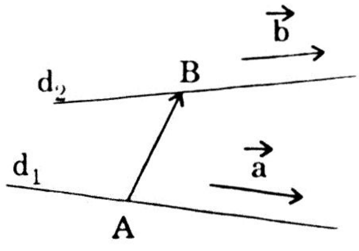
$\Rightarrow$ $B(-1, 2, 3)$. Chọn d.

20 Đường thẳng cần tìm là AB có phương trình : $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y - 1}{1} = \dfrac{z - 1}{2}$.

Chuyển sang tổng quát ta có : $\begin{cases} 3x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ cùng qua A và có VTCP $(-1, 1, 2)$.

Vậy a, b đều đúng. Chọn c.

Bài 5 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN



Cho (d_1) qua A; có vectơ chỉ phương $\vec{a}$ và có phương trình (1).

(d_2) qua B; có VTCP $\vec{b}$ và có phương trình (2).

- ***(d_1) và (d_2) cùng nằm trên 1 mặt phẳng*** $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}]\,\overrightarrow{AB} = 0$
- ***(d_1) cắt (d_2)*** $\Leftrightarrow$ *Hệ phương trình tìm giao điểm (1) (2) có nghiệm duy nhất.*

$$\overset{\text{hoặc}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} [\vec{a}, \vec{b}] \neq \vec{0} \\ [\vec{a}, \vec{b}]\,\overrightarrow{AB} = 0 \end{cases}$$

- ***(d_1) // (d_2)*** $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \text{ cùng phương } \vec{b} \\ \text{Hệ phương trình (1) (2) vô nghiệm} \end{cases}$

$$\overset{\text{hoặc}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \\ [\vec{a}, \overrightarrow{AB}] \neq \vec{0} \end{cases} \quad \overset{\text{hoặc}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \vec{a} \,//\, \vec{b} \\ A \in (d_1) \text{ mà } A \notin (d_2) \end{cases}$$

- ***(d_1) chéo (d_2)*** $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}]\,\overrightarrow{AB} \neq 0$

$$\overset{\text{hoặc}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \vec{a} \text{ không cùng phương } \vec{b} \\ \text{Hệ (1)(2) vô nghiệm} \end{cases}$$

BÀI TẬP

Bài 1. Cho (d) : $\begin{cases} 2x - y - 11 = 0 \\ x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$ và (Δ) : $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-6}{3}$

Chứng minh (d) và (Δ) cùng nằm trong một mặt phẳng. Viết phương trình mặt phẳng đó.

GIẢI

Ta có : $\vec{n}_1 = (2, -1, 0)$; $\vec{n}_2 = (1, -1, -1)$

$\Rightarrow$ VTCP của (d) là : $\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (1, 2, -1)$.

- ***Cách 1 :*** Phương trình tham số đường thẳng (Δ) là : $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 6 + 3t \end{cases}$

Thay x, y, z của phương trình (Δ) vào phương trình (d) ta có :

$$\begin{cases} 2(5 + 2t) - 2 - t - 11 = 0 \\ 5 + 2t - 2 - t - 6 - 3t = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t - 3 = 0 \\ -2t + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad t = 1$$

Do đó (d) cắt (Δ) tại I(7, 3, 9).

Vậy (d) và (Δ) cùng nằm trên 1 mặt phẳng.

Phương trình mặt phẳng chứa (d) và (Δ) qua I và nhận cặp VTCP là :

$$\vec{a} = (1, 2, -1) \text{ và } \vec{b} = (2, 1, 3)$$

$$\Rightarrow \quad \text{PVT } \vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = (7, -5, -3)$$

Phương trình mặt phẳng chứa (d) và (Δ) là :

$$7(x - 7) - 5(y - 3) - 3(z - 9) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 7x - 5y - 3z - 7 = 0$$

- ***Cách 2 :*** A(5, 2, 6) $\in (\Delta)$. Chọn $B\left(\frac{11}{2}, 0, \frac{21}{2}\right) \in (d)$

Xét : $\vec{a}_d = (1, 2, -1)$; $\vec{b} = (2, 1, 3)$; $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{2}, -2, \frac{9}{2}\right)$

Ta có : $[\vec{a}, \vec{b}] = (7, -5, -3) \quad \Rightarrow \quad [\vec{a}, \vec{b}]\overrightarrow{AB} = \frac{7}{2} + 10 - \frac{27}{2} = 0$

$\Rightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB}$ **đồng phẳng.**

$\Rightarrow \quad$ **(d) và (Δ) cùng nằm 1 mặt phẳng (α)**

Tương tự cách làm trên mặt phẳng (α) là : $7x - 5y - 3z - 7 = 0$. ■

Bài 2. **Cho** $(d_1) : \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3t \end{cases}$ **và** $(d_2) : \begin{cases} 3x - y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$

Chứng minh (d_1), (d_2) và A(1, 1, 1) cùng thuộc một mặt phẳng.

GIẢI

(d_1) qua M(0, –1, 0) và có VTCP $\vec{a} = (1, -2, -3)$

(d_2) qua N(0, 1, 2) và có VTCP $\vec{b} = (1, 2, 1)$

Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = (4, -4, 4) = 4(1, -1, 1)$

và $\overrightarrow{MN} = (0, 2, 2) = 2(0, 1, 1)$

Vậy $[\vec{a}, \vec{b}]\,\overrightarrow{MN} = 8.(0) = 0$ nên (d_1), (d_2) cùng thuộc mp(P).

(P) có PVT là $\vec{n} = (1, -1, 1)$

Phương trình mp(P) qua M(0, −1, 0) là :

$$1(x - 0) - 1(y + 1) + 1(z - 0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - y + z - 1 = 0$$

Ta có $A \in (P)$ vì $1 - 1 + 1 - 1 = 0$

Vậy (d_1), (d_2) và A cùng nằm trên mp(P). ■

Bài 3. Cho 2 đường thẳng (d) : $\begin{cases} 2x - 3y - 2 = 0 \\ x + 3z + 2 = 0 \end{cases}$; (Δ) : $\begin{cases} 2x - 3y + 9 = 0 \\ y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

1. Chứng minh (d) // (Δ). Viết phương trình mặt phẳng chứa (Δ) và (d).
2. Tìm tọa độ N đối xứng với M qua d với M(−2, 3, −4).

GIẢI

1. • VTCP của (d) là $\vec{a} = (-9, -6, 3) = -3(3, 2, -1)$

VTCP của (Δ) là $\vec{b} = (-6, -4, 2) = -2(3, 2, -1)$

Ta thấy $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương (1)

Mặt khác lấy $A(1, 0, -1) \in (d)$

Thế tọa độ A vào phương trình (Δ) ta thấy $A \notin (\Delta)$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow$ (d) // (Δ)

• Phương trình mặt phẳng (α) chứa (Δ) có dạng :

$$m(2x - 3y + 9 + n(y + 2z + 1) = 0$$

Do (α) qua (d) $\Rightarrow$ $A \in (\alpha)$ $\Rightarrow$ $11m - n = 0$ Chọn $m = 1 \wedge n = 11$

Vậy (α) : $x + 4y + 11z + 10 = 0$

2. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống (d) ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{MH} \perp \vec{a} \\ H \in (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x + 2) + 2(y - 3) - (z + 4) = 0 \\ 2x - 3y - 2 = 0 \\ x + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ 2x - 3y = 2 \\ x + 3z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 1 \\ y_H = 0 \\ z_H = -1 \end{cases}$$

Do M và N đối xứng qua (d) nên H là trung điểm MN

$$\Rightarrow \begin{cases} x_N = 2 + 2 = 4 \\ y_N = 2(0) - 3 = -3 \\ z_N = 2(-1) + 4 = 2 \end{cases}$$ Vậy N(4, -3, 2). ■

Bài 4. *Tuyển sinh ĐH khối A 2007*

Cho $d_1 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$ và $d_2 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3. \end{cases}$

a) Chứng minh d_1 và d_2 chéo nhau.

b) Viết phương trình đường thẳng d vuông góc mp (P) : $7x + y - 4z = 0$ và cắt d_1, d_2.

GIẢI

a) d_1 qua A(0, 1, -2); VTCP $\vec{a} = (2, -1, 1)$

d_2 qua B(-1, 1, 3); VTCP $\vec{b} = (2, 1, 0)$

Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = (-1, 2, 4)$ và $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 5)$

$$\Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}].\overrightarrow{AB} = 21 \neq 0$$

Vậy d_1, d_2 chéo nhau.

b) Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_1 và $\perp$ (P)

(α) có VTCP là $\vec{a}_{d_1} = (2, -1, 1)$ và $\vec{n}_P = (7, 1, -4)$

$$\Rightarrow \text{PVT } \vec{n}_\alpha = [\vec{a}, \vec{n}] = 3(1, 5, 3)$$

Phương trình mp(α) là : $1(x - 0) + 5(y - 1) + 3(z + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow x + 5y + 3z + 1 = 0$$

Gọi N là giao điểm d_2 và (α)

$N \in d_2 \Rightarrow \exists t : N(-1 + 2t, 1 + t, 3)$

$N \in (\alpha) \Rightarrow (-1 + 2t) + 5(1 + t) + 9 + 1 = 0 \Rightarrow t = -2$

Vậy N(-5, -1, 3).

(d) cần tìm qua N và có VTCP $\vec{n}_P$

Phương trình (d) : $\dfrac{x+5}{7} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{-4}$. ■

Bài 5. *Tuyển sinh ĐH khối D 2005*

Cho $d_1 : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$ và $d_2 : \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y - 12 = 0. \end{cases}$

a) Chứng minh d_1 song song d_2. Viết phương trình mặt phẳng chứa d_1, d_2.

b) d_1 và d_2 cắt mp(Oxz) tại A, B. Tính diện tích ΔOAB.

GIẢI

a) d_1 qua M(1, −2, −1); VTCP $\vec{a} = (3, -1, 2)$

d_2 qua B(12, 0, 10); VTCP $\vec{b} = (3, -1, 2)$

Ta có $\vec{a} = \vec{b}$ và $A \in d_1$ mà $A \notin d_2$ Vậy $d_1 \,//\, d_2$.

Mp (d_1, d_2) có VTCP là : $\vec{a} = (3, -1, 2)$ và $\overrightarrow{MB} = (11, 2, 11)$

$\Rightarrow$ PVT $\vec{n} = [\vec{a}, \overrightarrow{MB}] = (-15, -11, 17)$

Phương trình mặt phẳng (d_1, d_2) là :

$$-15(x - 1) - 11(y + 2) + 17(z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 15x + 11y - 17 - 10 = 0$$

b) d_1 cắt mp(Oxz) tại A(−5, 0, −5)

d_2 cắt mp(Oxz) tại B(12, 0, 10)

Ta có : $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (0, -10, 0)$

Vậy $\quad \text{dt}(\Delta OAB) = \dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]\right| = \dfrac{|-10|}{2} = 5.$ ■

Bài 6. *Đề Dự bị khối B 2005*

Cho $d_1 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$ và $d_2 : \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 + t. \end{cases}$

a) Chứng minh d_1, d_2 chéo nhau.

b) Tìm M trên d_1, N trên d_2 sao cho MN song song mp(P) : $x - y + z = 0$ và $MN = \sqrt{2}$.

GIẢI

a) d_1 qua O(0, 0, 0); VTCP $\vec{a} = (1, 1, 2)$

d_2 qua A(−1, 0, 1); VTCP $\vec{b} = (-2, 1, 1)$

Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = (-1, -5, 3)$ và $\overrightarrow{OA} = (-1, 0, 1)$

Do $[\vec{a}, \vec{b}]\overrightarrow{OA} = 1 + 3 = 4 \neq 0$ nên d_1, d_2 chéo nhau.

b) $M \in d_1 \quad \Rightarrow \quad \exists u : M(u, u, 2u)$

$M \in d_2 \quad \Rightarrow \quad \exists t : N(-1 - 2t, t, t + 1)$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{MN} = (-2t - u - 1, t - u, t - 2u + 1)$

Do MN // (P) $\quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{MN} \perp \vec{n}_P = (1, -1, 1)$

$\Rightarrow \quad -2t - u - 1 - t + u + t - 2u + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad -2t - 2u = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -u$

Mặt khác $MN^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad (u - 1)^2 + 4u^2 + (1 - 3u)^2 = 2$

$\Rightarrow \quad 2u(2u - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0 \vee u = \frac{4}{7}$

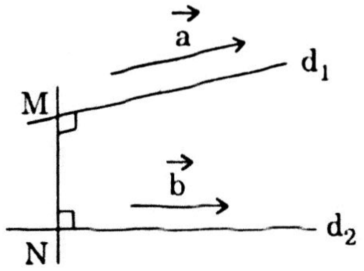
- $u = 0$ ta có $M(0, 0, 0) \Rightarrow O \in (P)$ (loại)
- $u = \frac{4}{7}$ ta có $M\left(\frac{4}{7}, \frac{4}{7}, \frac{8}{7}\right)$; $N\left(\frac{1}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{3}{7}\right)$. ■

CHÚ Ý :

1. Phương pháp viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường chéo nhau

* ***Cách 1 :*** *Giả sử (D_1), (D_2) có phương trình tham số là :*

$$(D_1) : \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \qquad (D_2) : \begin{cases} x = x_1 + t'b_1 \\ y = y_1 + t'b_2 \\ z = z_1 + t'b_3 \end{cases}$$



+ *Lấy $M \in (D_1)$, $N \in (D_2)$*

thì $\overrightarrow{MN} = (x_1 - x_0 + t'b_1 - ta_1,\ y_1 - y_0 + t'b_2 - ta_2,\ z_1 - z_0 + t'b_3 - ta_3)$

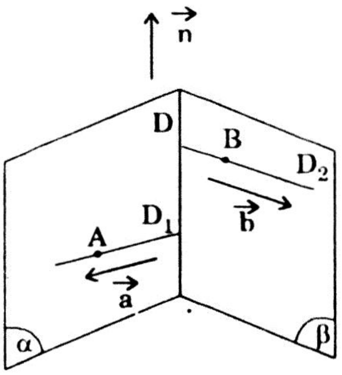
+ *MN là đường vuông góc chung*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} MN \perp (D_1) \\ MN \perp (D_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \overrightarrow{MN} \perp \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{cases}$$

+ *Giải hệ phương trình trên tìm t, t'. Thế vào phương trình (D_1), phương trình (D_2). Ta được tọa độ M và N.*

Lập phương trình đường (MN) đó chính là đường vuông góc chung.

* ***Cách 2 :***



+ *Tìm VTCP $\vec{a}$, $\vec{b}$ của (D_1), (D_2)*

+ *Tìm $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$*

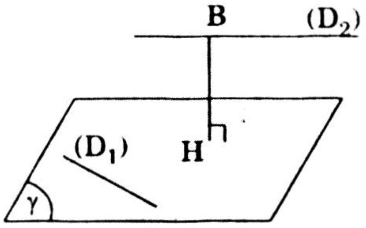
+ *Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa (D_1) và nhận $\vec{n}$ là VTCP.*

+ *Lập phương trình mặt phẳng (β) chứa (D_2) và nhận $\vec{n}$ là VTCP.*

+ *Đường vuông góc chung chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (α), (β)*

2. Phương pháp tìm khoảng cách giữa hai đường chéo nhau

* ***Cách 1 :*** *Độ dài MN ở phương pháp 1 chính là khoảng cách giữa* **(D_1), (D_1)**
* ***Cách 2 :***



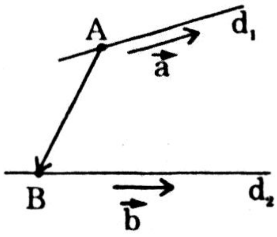
- *Viết phương trình mặt phẳng (γ) chứa (D_1) và // (D_2)*

- *Lấy $B \in (D_2)$ thì $\delta(D_1, D_2) = \delta(B, \gamma)$*

* ***Cách 3 :*** *Nếu (D_1) qua A và có VTCP $\vec{a}$*

(D_2) qua B và có VTCP $\vec{b}$

thì $$\boxed{\delta(D_1, D_2) = \frac{\left|[\vec{a}, \vec{b}]\overrightarrow{AB}\right|}{\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|}}$$



BÀI TẬP

Bài 7. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng

$$(D_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3} \quad \text{và} \quad (D_2): \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

GIẢI

- ***Cách 1 :*** (D_1) qua A(1, 2, 3) và có VTCP $\vec{a} = (1, 2, 3)$

Ta có : $\vec{n}_1 = (1, 2, -1)$; $\vec{n}_2 = (2, -1, 3)$

VTCP của (D_2) là : $\vec{b} = (5, -5, -5) = -5(-1, 1, 1)$

Cho $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$. Vậy (d_2) qua B(2, −1, 0).

Gọi (α) là mặt phẳng chứa (d_2) và // (d_1). Vậy (α) qua B và nhận $\vec{a}$, $\vec{b}$ là VTCP

$\Rightarrow$ PVT $\vec{n}_\alpha = [\vec{a}, \vec{b}] = (-1, -4, 3)$

Phương trình mặt phẳng α là :

$$-1(x - 2) - 4(y + 1) + 3z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 4y - 3z + 2 = 0$$

Khoảng cách của hai đường (d_1), (d_2) chính là khoảng cách từ $A \in d_1$ đến mặt phẳng (α) :

$$\delta(d_1, d_2) = \frac{|1 + 4(2) - 9 + 2|}{\sqrt{1 + 16 + 9}} = \frac{2}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{13}.$$

- ***Cách 2 :*** Phương trình mặt phẳng (α) chứa (d_2) và // (d_1)

Vì (α) chứa (d_2) nên có dạng :

$$m(x + 2y - z) + n(2x - y + 3z - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (m + 2n)x + (2m - n)y + (3n - m)z - 5n = 0$$

Do (α) // d_1 $\Rightarrow$ PVT $\vec{n}_\alpha \perp$ VTCP $\vec{a}$

$\Rightarrow$ $1(m + 2n) + 2(2m - n) + 3(3n - m) = 0$

$\Rightarrow$ $2m + 9n = 0$

Chọn $m = 9 \Rightarrow n = -2$

Vậy phương trình (α) : $5x + 20y - 15z + 10 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x + 4y - 3z + 2 = 0$

Do đó $\delta(d_1, d_2) = \delta(A, \alpha) = \dfrac{\sqrt{26}}{13}$.

- ***Cách 3 :***

Ta đã có (d_1) qua A(1, 2, 3) và có VTCP $\vec{a} = (1, 2, 3)$

(d_2) qua B(2, –1, 0) và có VTCP $\vec{b}\,' = (-1, 1, 1)$

Xét $\overrightarrow{AB} = (1, -2, -3)$; $[\vec{a}, \vec{b}\,'] = (-1, -4, 3)$

Vậy : $$\delta(d_1, d_2) = \frac{|[\vec{a}, \vec{b}]\overrightarrow{AB}|}{|[\vec{a}, \vec{b}]|} = \frac{|-1 + 12 - 9|}{\sqrt{1 + 16 + 9}} = \frac{2}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{13}. \blacksquare$$

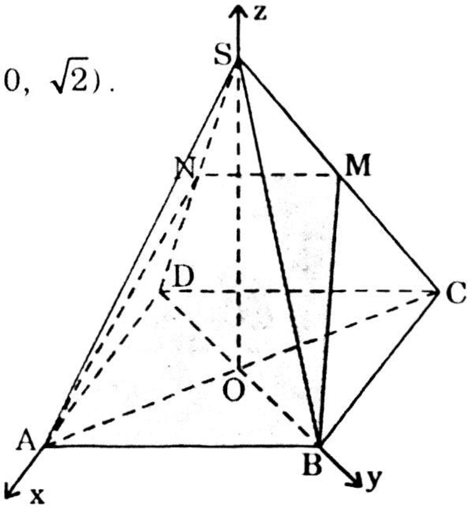
Bài 8. *Tuyển sinh Đại học khối A 2004*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O. Biết A(2, 0, 0); B(0, 1, 0); S(0, 0, $2\sqrt{2}$). Gọi M là trung điểm SC.

a) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng (SA) và (BM).

b) (SD) cắt mp(ABM) tại N. Tính thể tích đa diện S.ABMN.

GIẢI



Ta có : $C(-2, 0, 0)$; $D(0, -1, 0)$; $M(-1, 0, \sqrt{2})$.

a) • $\overrightarrow{SA} = (2, 0, -2\sqrt{2})$ và $\overrightarrow{BM} = (-1, -1, \sqrt{2})$

Gọi (α) là góc của SA, BM, ta có :

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BM}|}{SA.BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

• Ta có : $[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}] = (-2\sqrt{2}, 0, -2)$ và $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 0)$

Vậy $$d(SA, BM) = \frac{|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}].\overrightarrow{AB}|}{|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}]|} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

b) Ta có : MN // AB // CD $\Rightarrow$ N là trung điểm SD

Vậy $N\left(0, -\dfrac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$

Ta có : $\overrightarrow{SA} = (2, 0, -2\sqrt{2})$ và $\overrightarrow{SM} = (-1, 0, -\sqrt{2})$

$\Rightarrow [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}] = (0, 4\sqrt{2}, 0)$

Ta có : $\overrightarrow{SB} = (0, 1, -2\sqrt{2})$ và $\overrightarrow{SN} = \left(0, -\dfrac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)$

Vậy $V_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN}$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}]\overrightarrow{SB}| + \frac{1}{6}|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}]\overrightarrow{SN}|$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}.$$ ■

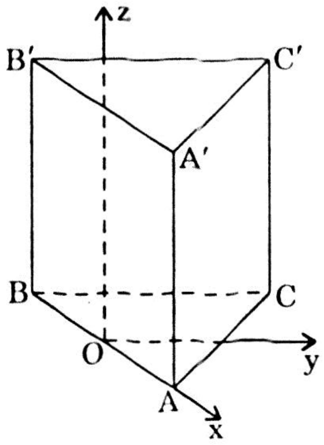
Bài 9. *Tuyển sinh Đại học khối D 2004*

Cho hình lăng trụ đứng ABCA'B'C' biết $A(a, 0, 0)$; $B(-a, 0, 0)$; $C(0, 1, 0)$; $B'(-a, 0, b)$ với $a, b > 0$.

a) Tính khoảng cách d của hai đường thẳng B'C và AC'.

b) Cho a, b thay đổi mà $a + b = 4$. Tìm a, b để d đạt giá trị lớn nhất.

GIẢI



a) Ta có $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BB'}$

Vậy $C'(0, 1, b)$

Ta có $\overrightarrow{B'C} = (a, 1, -b)$ và $\overrightarrow{AC'} = (-a, 1, b)$

$\Rightarrow$ $[\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{AC'}] = (2b, 0, 2a)$

mà $\overrightarrow{AC} = (-a, 1, 0)$

Vậy $$d = \frac{|[\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{AC'}]\overrightarrow{AC}|}{|[\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{AC'}]|} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

b) Do bất đẳng thức Cauchy :

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad \text{và} \quad a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

nên $$d = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq \frac{ab}{\sqrt{2ab}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Do đó $$d_{max} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b > 0 \\ a = b \\ a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2. \blacksquare$$

Bài 10. Cho 2 đường thẳng song song : $(D_1) : \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$

và $(D_2) : \frac{x}{3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+18}{4}$

a) Viết phương trình mặt phẳng chứa (D_1) và (D_2).

b) Tính khoảng cách giữa (D_1) và (D_2).

GIẢI

a) (D_1) qua $A(-7, 5, 9)$ và có VTCP $\vec{a} = (3, -1, 4)$

Mặt phẳng chứa (D_1), (D_2) là mặt phẳng qua A và có cặp VTCP là $\vec{a}$ và $\overrightarrow{AB} = (7, -9, -27)$. Vậy PVT $[\vec{a}, \vec{b}] = (63, 109, -20)$

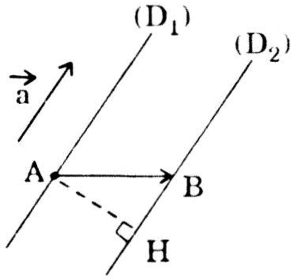
Do đó phương trình mặt phẳng qua (D_1) và (D_2) là :

$$63(x + 7) + 109(y - 5) - 20(z - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 63x + 109y - 20z + 76 = 0$$

b) Do $(D_1) // (D_2)$ nên $\delta(D_1, D_2) = \delta(A, D_2)$

- ***Cách 1 :***



Gọi (β) là mặt phẳng qua A và ⊥ (D_2)

$$3(x + 7) - 1(y - 5) + 4(z - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x - y + 4z - 10 = 0$$

(D_2) có phương trình tham số : $\begin{cases} x = 3t \\ y = -4 - t \\ z = -18 + 4t \end{cases}$

Thế vào phương trình (β) $\Rightarrow \quad 9t + 4 + t + 4(-18 + 4t) - 10 = 0$

$\Rightarrow \quad 26t - 78 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 3$

Vậy (D_2) cắt mặt phẳng (β) tại H(9, –7, –6).

Do đó : $\delta(D_1, D_2) = \delta(A, D_2) = AH = \sqrt{16^2 + 12^2 + 45^2} = 25.$

- ***Cách 2 :***

$$\delta(D_1, D_2) = \delta(A, D_2) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{a}]|}{|\vec{a}|}$$

$$= \frac{\sqrt{63^2 + 109^2 + 400}}{\sqrt{9 + 1 + 16}} = \frac{\sqrt{16250}}{\sqrt{26}} = 25. \quad ■$$

Bài 11. Cho hai đường thẳng (d) : $\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases}$ và (d') : $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

a) Chứng minh hai đường thẳng (d) và (d') chéo nhau. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (d) và (d').

b) Hai điểm A, B và cố định trên đường thẳng (d) sao cho AB = $\sqrt{117}$. Khi C di động trên đường thẳng d', tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích ΔABC.

GIẢI

a) Ta có : $\vec{n}_1 = (2, 3, 0)$; $\quad \vec{n}_2 = (0, 1, 1)$

$\Rightarrow \quad$ VTCP $\vec{a}_d = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (3, -2, 2)$ và (d) qua M(2, 0, 4)

Đường thẳng (d') qua N(1, 2, –1) và có VTCP $\vec{b} = (3, 1, 2)$

Ta có : $\quad [\vec{a}, \vec{b}] = 3(-2, 0, 3)$ và $\overrightarrow{MN} = (-1, 2, -5)$

Do đó : $\quad [\vec{a}, \vec{b}].\overrightarrow{MN} = -39 \neq 0.$

Vậy d_1, d_2 chéo nhau.

Ta có $\delta(d_1, d_2) = HK = \dfrac{\left|[\vec{a}, \vec{b}].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|} = \sqrt{13}$

b) Ta có $S = S_{(\Delta ABC)} = \dfrac{1}{2}CI.AB$ (I là chân đường vuông góc vẽ từ C đến d)

$\Leftrightarrow \quad S = \dfrac{1}{2}CI.\sqrt{117}$

Mà $\quad CI \geq HK = \sqrt{13}$

Do đó $S = \dfrac{\sqrt{117}}{2}CI \geq \dfrac{\sqrt{117}}{2}.HK = \dfrac{\sqrt{117}}{2}.\sqrt{13} = \dfrac{39}{2}$

Dấu = xảy ra khi CI là đoạn vuông góc chung của (d) và (d').

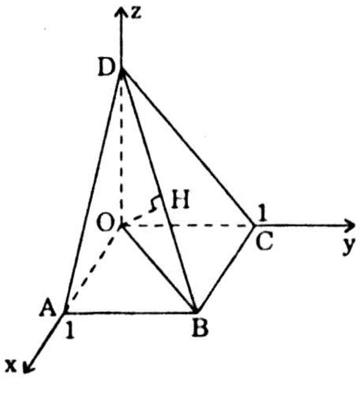
Vậy : $S_{min} = \dfrac{39}{2}$. ■

Bài 12. Cho A(1, 0, 0); B(1, 1, 0); C(0, 1, 0); D(0, 0, m) với m là tham số ≠ 0.

a) Tính khoảng cách giữa AC và BD khi m = 2.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên BD. Tìm các giá trị của tham số m để diện tích ΔOBH đạt giá trị lớn nhất.

GIẢI



a) Khi m = 2 thì : $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$;

$\overrightarrow{BD} = (-1, -1, 2)$ và $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0)$

$\Rightarrow \quad [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}] = (2, 2, -2)$.

Vậy $\delta(AC, BD) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right]\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right]\right|} = \dfrac{|2|}{\sqrt{12}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

b) ΔOBD vuông tại O.

$\Rightarrow \quad OH = \dfrac{OD.OB}{DB} = \dfrac{|m|\sqrt{2}}{\sqrt{m^2 + 2}}$ và $HB = \dfrac{OB^2}{BD} = \dfrac{2}{\sqrt{m^2 + 2}}$

Do đó $S = S_{(\Delta OHB)} = \dfrac{1}{2}OH.HB = \dfrac{|m|\sqrt{2}}{m^2 + 2}$ (ΔOHB ⊥ tại H)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có :

$m^2 + 2 \geq 2\sqrt{2m^2} = 2\sqrt{2}\,|m|$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \ge \frac{|m|}{m^2+2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \ge \frac{|m|\sqrt{2}}{m^2+2} = S$$

Dấu "=" xảy ra ⇔ $m^2 = 2$ ⇔ $m = \pm\sqrt{2}$

Do đó $\text{Max}\,S = \frac{1}{2}$ ⇔ $m = \pm\sqrt{2}$. ■

Bài 13. *Tuyển sinh ĐH khối A 2006*

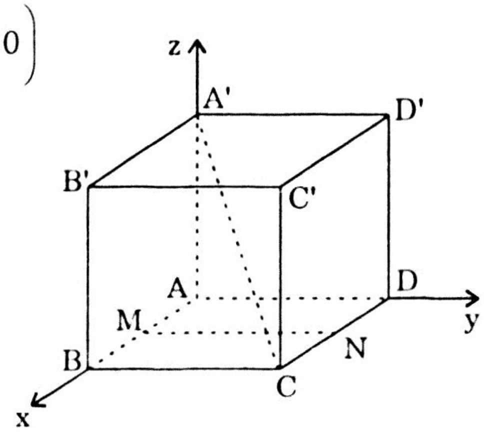
Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có A(0, 0, 0); B(1, 0, 0); D(0, 1, 0); A'(0, 0, 1). Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD.

a) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng A'C và MN.

b) Viết phương trình mặt phẳng chứa A'C và tạo với mp(Oxy) góc α mà $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

GIẢI

a) Ta có C(1, 1, 0); $M\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$; $N\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$



$\Rightarrow \quad \overrightarrow{A'C} = (1, 1, -1); \quad \overrightarrow{MN} = (0, 1, 0)$

$\Rightarrow \quad [\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}] = (1, 0, 1)$

và $\overrightarrow{A'M} = \left(\frac{1}{2}, 0, -1\right)$

Vậy $\delta(A'C, MN) = \dfrac{|[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}]\overrightarrow{A'M}|}{|[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}]|} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

b) Phương trình (A'C) : $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$

Phương trình tổng quát A'C : $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$

Phương trình mp(P) chứa A'C có dạng :

$$m(x - y) + n(x + z - 1) = 0 \quad \text{với } m^2 + n^2 \ne 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (m + n)x - my + nz - n = 0$$

Mp(P) có PVT $\vec{i} = (m + n, -m, n)$

Ta có $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{i}.\vec{k}|}{|\vec{i}|\,|\vec{k}|}$ ⇔ $\dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{|n|}{\sqrt{(m+n)^2 + m^2 + n^2}}$

$\Leftrightarrow \quad m^2 + mn - 2n^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = n \vee m = -2n$

Chọn $n = 1$ thì $m = 1 \vee m = -2$.

Phương trình (P) là : $2x - y + z - 1 = 0$ hay $-x + 2y + z - 1 = 0$. ■

Bài 14. *Đề Dự bị khối B 2006*

Cho đường thẳng $\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 \end{cases}$ và $\Delta_2 : \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$.

a) Viết phương trình mặt phẳng chứa Δ_1 và song song Δ_2.

b) Tìm A trên Δ_1, B trên Δ_2 sao cho AB ngắn nhất.

GIẢI

a) Δ_1 qua $M(1, -1, 2)$ và có VTCP $\vec{a} = (1, -1, 0)$

Δ_2 qua $N(3, 1, 0)$ và có VTCP $\vec{b} = (-1, 2, 1)$

Mặt phẳng (P) cần tìm qua M và có PVT $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = (1, 1, -1)$

Phương trình mp(P) là : $1(x - 1) + 1(y + 1) - 1(z - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x + y - z + 2 = 0$.

b) $A \in \Delta_1$ nên $\exists t : A(1 + t, -1 - t, 2)$

$B \in \Delta_2$ nên $\exists u : B(3 - u, 1 + 2u, u)$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = (2 - u - t, 2 + 2u + t, u - 2)$

AB ngắn nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} AB \perp \Delta_1 \\ AB \perp \Delta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{a} = (1, -1, 0) \\ \overrightarrow{AB} \perp \vec{b} = (-1, 2, 1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1(2 - u - t) - 2 - 2u - t = 0 \\ -2 + u + t + 2(2 + 2u + t) + u - 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 3u = 0 \\ 3t + 6u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad u = t = 0$

$\Leftrightarrow \quad A(1, -1, 2)$ và $B(3, 1, 0)$. ■

Bài 15. Cho hai đường thẳng $(d_1) : \dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-9}{-1}$

$(d_2) : \dfrac{x-3}{-7} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$

a) Chứng minh (d_1), (d_2) chéo nhau.

b) Lập phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

GIẢI

a) Ta có : $A(7, 3, 9) \in (d_1)$; $B(3, 1, 1) \in (d_2)$

(d_1) có VTCP $\vec{a} = (1, 2, -1)$

(d_2) có VTCP $\vec{b} = (-7, 2, 3)$

Xét $\overrightarrow{AB} = (-4, -2, -8)$ và $[\vec{a}, \vec{b}] = (8, 4, 16)$

Ta có : $[\vec{a}, \vec{b}]\overrightarrow{AB} = -4(8) - 2(4) - 8(16) = -168 \neq 0$

Vậy (d_1) (d_2) chéo nhau.

b) Phương trình tham số (d_1) : $\begin{cases} x = 7 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 9 - t \end{cases}$

Phương trình tham số (d_2) : $\begin{cases} x = 3 - 7t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = 1 + 3t' \end{cases}$

Lấy $M \in (d_1)$, $N \in (d_2)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-4 - 7t' - t, -2 + 2t' - 2t, -8 + 3t' + t)$

(MN) là đường vuông góc chung $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \vec{a} \\ \overrightarrow{MN} \perp \vec{b} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1(-4 - 7t' - t) + 2(-2 + 2t' - 2t) - 1(-8 + 3t' + t) = 0 \\ -7(-4 - 7t' - t) + 2(-2 + 2t' - 2t) + 3(-8 + 3t' + t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6t - 6t' = 0 \\ 6t + 62t' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

Vậy $M(7, 3, 9)$; $N(3, 1, 1)$; $\overrightarrow{MN} = (-4, -2, -8) = -2(2, 1, 4)$

Phương trình đường vuông góc chung là (MN) :

$$\frac{x - 7}{2} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 9}{4}. \quad \blacksquare$$

Bài 16. Cho 2 đường thẳng (d) : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ (d') : $\begin{cases} x + 2z - 2 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}$

1. Chứng minh (d) và (d') chéo nhau. Hãy viết phương trình đường vuông góc chung của (d) và (d').
2. Viết phương trình tổng quát mặt phẳng cách đều (d), (d').

GIẢI

1. (d) có VTCP $\vec{a} = (1, -1, 2)$ và qua $A(2, 1, 0)$

(d') qua $B(2, 3, 0)$ và có VTCP $\vec{b} = (-2, 0, 1)$

Xét $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0) = 2(0, 1, 0)$ và $[\vec{a}, \vec{b}] = (-1, -5, -2)$

Ta xét $[\vec{a}, \vec{b}]\overrightarrow{AB} = 0 - 10 + 0 = -10 \neq 0 \Rightarrow$ (d) và (d') chéo nhau.

* Phương trình tham số (d') là : $\begin{cases} x = 2 - 2t' \\ y = 3 \\ z = t' \end{cases}$

Gọi M ∈ (d) và N ∈ (d') $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-2t' - t, 2 + t, t' - 2t)$

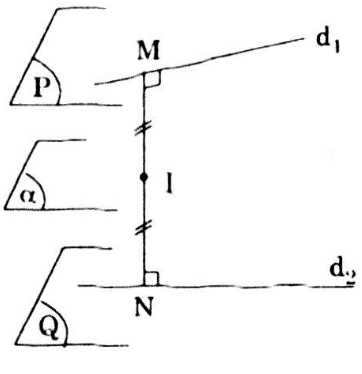
(MN) là đường vuông góc của (d), (d') $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \vec{a} \\ \overrightarrow{MN} \perp \vec{b} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1(-2t' - t) - 2 - t + 2(t' - 2t) = 0 \\ -2(-2t' - t) + 0 + t' - 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6t - 2 = 0 \\ 5t' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{1}{3} \\ t' = 0 \end{cases}$$

Do đó : $M\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$; $N(2, 3, 0) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}(1, 5, 2)$

Phương trình đường MN : $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z-0}{2}$.

2. Mặt phẳng (α) cách đều (d) và (d') chính là mặt phẳng trung trực của MN. Mặt phẳng (α) qua trung điểm của MN là $I\left(\frac{11}{16}, \frac{13}{6}, -\frac{2}{6}\right)$ và có $\overrightarrow{MN}$ là PVT.



Phương trình (α) là :

$$1\left(x - \frac{11}{6}\right) + 5\left(y - \frac{13}{6}\right) + 2\left(z + \frac{2}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 5y + 2z - 12 = 0. \quad ■$$

Bài 17. $(D_1) : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$ $(D_2) : \begin{cases} x - 2y - 2z + 9 = (\\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$

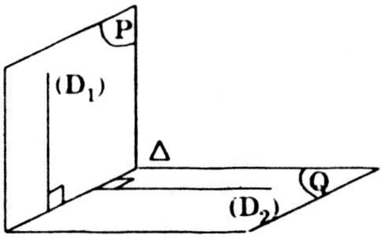
Chứng minh $(D_1) \perp (D_2)$.

Viết phương trình đường vuông góc chung của (D_1) và (D_2).

Ghi chú : Đặc biệt khi (D_1) và (D_2) chéo nhau và vuông góc ta có thể viết phương trình đường vuông chung như sau :

+ Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa (D_1) và $\perp (D_2)$.
+ Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa (D_2) và $\perp (D_1)$
+ Đường vuông góc chung là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

GIẢI



a) Ta có : $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$; $\vec{n}_2 = (0, 1, 1)$

$\Rightarrow$ VTCP của (D_1) là $\vec{a} = (0, -1, 1)$

Ta có : $\vec{n}_3 = (1, -2, -2)$; $\vec{n}_4 = (0, 1, -1)$

$\Rightarrow$ VTCP của (D_2) là $\vec{b} = (4, 1, 1)$

Ta có : $\vec{a} . \vec{b} = 0$.

Vậy $(D_1) \perp (D_2)$.

b) • Cho $z = 0 \Rightarrow A(2, 1, 0) \in (D_1)$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa (D_1) và $\perp (D_2)$. Vậy (P) qua A và nhận $\vec{b}$ là PVT.

Phương trình mặt phẳng (P) :

$$4(x - 2) + 1(y - 1) + 1z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x + y + z - 9 = 0$$

• Cho $z = 0 \Rightarrow B(-11, -1, 0) \in (D_2)$

Gọi Q là mặt phẳng chứa (D_2) và $\perp (D_1)$. Vậy phương trình mặt phẳng (Q) :

$$0(x + 11) - 1(y + 1) + 1(z - 0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -y + z - 1 = 0$$

Do đó phương trình đường vuông góc chung của (D_1) và (D_2) là :

$$\begin{cases} 4x + y + z - 9 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad \blacksquare$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. *Dự bị 2004*

Cho A(4, 2, 2); B(0, 0, 7) và (d) : $\dfrac{x - 3}{-2} = \dfrac{y - 6}{2} = \dfrac{z - 1}{1}$.

Chứng minh (d) và AB cùng thuộc một mặt phẳng. Tìm C trên (d) để ΔABC cân tại A.

BT2. Chứng minh 2 đường thẳng sau cùng nằm trên 1 mặt phẳng. Viết phương trình mặt phẳng đó ?

a) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-5}{4}$ và $\begin{cases} x = 3t + 7 \\ y = 2t + 2 \\ z = -2t + 1 \end{cases}$

b) $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{5}$ và $\begin{cases} 4x - 5y - 9 = 0 \\ 3x - 5z + 7 = 0 \end{cases}$

BT3. Chứng minh 2 đường thẳng sau song song. Viết phương trình mặt phẳng chứa 2 đường thẳng đó :

a) $\dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z-9}{4}$ và $\dfrac{x}{-3} = \dfrac{y+4}{1} = \dfrac{z+18}{-4}$

b) $\begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + 3y - 2 = 0 \\ 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$

BT4. Chứng minh 2 đường thẳng sau chéo nhau :

a) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$ và $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 2t \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t - 3 \\ z = 3t + 1 \end{cases}$

BT5. Cho A(1, 2, 1); B(7, –2, 3) và đường thẳng (d) : $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$

a) Chứng minh đường thẳng (d) và đường thẳng AB cùng nằm trên 1 mặt phẳng.

b) Tìm $I \in (d)$ sao cho (IA + IB) ngắn nhất.

BT6. Cho A(2, 3, 5), (P) : $2x + 3y + z - 17 = 0$

a) Viết phương trình đường thẳng (d) qua A và vuông góc (P).

b) Chứng minh (d) cắt trục Oz. Tìm tọa độ giao điểm M.

c) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua đường thẳng (d).

BT7. Cho 2 đường thẳng : $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-4}{3}$ và $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = -t \\ z = 3t - 2 \end{cases}$.

Chứng minh hai đường thẳng này cùng nằm trên 1 mặt phẳng. Lập phương trình mặt phẳng đó.

BT8. **a)** Viết phương trình đường thẳng (d) qua A(1, 0, 3) và vuông góc mặt phẳng (α) : $2x - y + 2z - 1 = 0$.

b) Xét vị trí tương đối của đường thẳng (d) tìm được với đường thẳng

$$(\Delta) : \begin{cases} x - y - 2z - 1 = 0 \\ 2x + 2y + z - 3 = 0. \end{cases}$$

BT9. Cho A(6, 3, 0); B(−2, 9, 1); S(0, 5, 8).

a) Chứng minh rằng $SB \perp OA$.

b) Chứng minh rằng hình chiếu của đường thẳng SB lên mặt phẳng (OAB) vuông góc với OA. Tìm tọa độ giao điểm K của đường thẳng hình chiếu này với đường thẳng OA.

c) Gọi P, Q là trung điểm SO và AB. Tìm tọa độ M sao cho PQ cắt KM.

BT10. Cho $(d_1) : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{2}$ $\quad (d_2) : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{-4}$

$(d_3) : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$ và $(d_4) : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$

a) Chứng minh (d_1), (d_2) cùng thuộc 1 mặt phẳng.

b) Chứng minh tồn tại 1 đường thẳng (d) cắt cả bốn đường thẳng đã cho. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng (d).

BT11. *Dự bị khối D 2006*

$(d_1) : \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{3}$ và $(d_2) : \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{2}$.

a) Chứng minh d_1, d_2 chéo nhau.

b) Viết phương trình đường thẳng nằm trong (P) : $4x - 3y + 11z - 26 = 0$ đồng thời cắt d_1, d_2.

BT12. *Dự bị 2003*

$(d_1) : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{1}$ và $(d_2) : \begin{cases} 3x - z + 1 = 0 \\ 2z + y - 1 = 0. \end{cases}$

a) Chứng minh d_1, d_2 chéo nhau và vuông góc.

b) Viết phương trình d cắt d_1, d_2 và vuông góc $(\Delta) : \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-7}{4} = \dfrac{z-3}{-2}$.

BT13. Tìm khoảng cách giữa các cặp đường thẳng sau :

a) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t - 1 \\ z = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3t \end{cases}$ $\qquad$ **b)** $\begin{cases} 2x - 2 - 1 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} 3x + y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

c) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-4}{-2}$ và $\dfrac{x+2}{-4} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{4}$.

BT14. Viết phương trình đường vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau :

a) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$

b) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-4}{3}$ và $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z+1}{0}$

c) $\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = -6t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

BT15. Cho 2 đường thẳng :

$$(d_1) : \begin{cases} 2x + z + 4 = 0 \\ 2y - z - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad (d_2) : \begin{cases} x + 4y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) Chứng minh (d_1) và (d_2) chéo nhau. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

b) Viết phương trình chính tắc của đường thẳng qua M(2, 3, 1) và cắt hai đường thẳng d_1, d_2.

BT16. Cho 2 đường chéo có phương trình :

$$(m) : \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad (n) : \begin{cases} x = -3u \\ y = 3 + 2u \\ z = -2 \end{cases}$$

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (m), (n).

b) Viết phương trình đường vuông góc chung của 2 đường thẳng (m), (n).

BT17. Cho A(5, 1, 3); B(1, 6, 2); C(5, 0, 4); D(4, 0, 6).

a) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (ABC).

b) Tính khoảng cách của 2 đường thẳng AB và CD.

BT18. Cho đường thẳng $(\Delta_1) : \begin{cases} x - 8z + 23 = 0 \\ y - 4z + 10 = 0 \end{cases}$ và $(\Delta_2) : \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$

a) Viết phương trình mặt phẳng (P), (Q) song song với nhau lần lượt chứa (Δ_1), (Δ_2).

b) Tính khoảng cách giữa (Δ_1) và (Δ_2).

c) Viết phương trình đường thẳng (Δ) song song Oz và cắt (Δ_1), (Δ_2).

BT19. Cho đường thẳng $(d) : \begin{cases} 2x - y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$ và $(d') : \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$

a) Tính khoảng cách giữa (d) và (d').

b) Cho A, B $\in$ (d) và AB = 3, cho C, D $\in$ (d') và CD = 4. Tính thể tích tứ diện ABCD.

BT20. Cho 2 đường thẳng

$$(d_1): \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = z - 4 \quad \text{và} \quad (d_2): \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x + y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

a) Cho biết vị trí tương đối của (d_1) và (d_2).

b) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

c) Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

d) Viết phương trình mặt phẳng cách đều (d_1) và (d_2).

e) Viết phương trình đường thẳng qua gốc tọa độ O, cắt hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

BT21. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' với A(0, 0, 0); B(a, 0, 0); D(0, b, 0); A'(0, 0, 0) điều kiện a, b, c > 0.

a) Tính góc giữa 2 đường thẳng DA' và BD'.

b) Viết phương trình đường vuông góc chung của DA' và BD'.

BT22. *Dự bị khối B 2002*

$$\text{Cho } d_1: \begin{cases} x - az - a = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \text{ và } d_2: \begin{cases} ax + 3y - 3 = 0 \\ x + 3z - 6 = 0. \end{cases}$$

a) Tìm a để d_1 cắt d_2.

b) Khi a = 2 viết phương trình mặt phẳng chứa d_1 và song song d_2. Tính khoảng cách giữa d_1 và d_2.

BT23. *Dự bị khối D 2002*

Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AD và BC.

15 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

$\boxed{1}$ Cho $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$ và $d': \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$

Kết luận nào sau đây là đúng :

a) d cắt d'

b) d song song d'

c) d, d' chéo nhau

d) d trùng d'.

2 Cho d : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$ và d' : $\begin{cases} x = 2 + t' \\ y = -3 + 2t' \\ z = 1 + 3t'. \end{cases}$

Kết luận nào sau đây là đúng :

a) d cắt d' b) d song song d'

c) d, d' chéo nhau d) d trùng d'.

3 Cho d : $\begin{cases} x = 9t \\ y = 5t \\ z = -3 + t \end{cases}$ và d' : $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$

Kết luận nào sau đây là đúng :

a) d cắt d' b) d song song d'

c) d, d' chéo nhau d) d trùng d'.

4 Cho d : $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-3}{4}$ và d' : $\dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$.

Kết luận nào sau đây là đúng :

a) d cắt d' b) d song song d'

c) d, d' chéo nhau d) d trùng d'.

5 Cho d : $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 5 - t \end{cases}$ và d' : $\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ y - z + 4 = 0. \end{cases}$

Kết luận nào sau đây là đúng :

a) d cắt d' b) d song song d'

c) d, d' chéo nhau d) d trùng d'.

6 Cho d : $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}$ và d' : $\begin{cases} 4x + y - 19 = 0 \\ y + 4z - 79 = 0. \end{cases}$

Kết luận nào sau đây là đúng, d cắt d' tại :

a) A(–3, –2, 6) b) B(5, –2, 20) c) C(3, 7, 18) d) D(3, -2, 1).

7 Cho d : $\begin{cases} x = 1 + mt \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và d' : $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - z + 2 = 0. \end{cases}$

d cắt d' khi :

a) $m = 0$ b) $m \neq 0$ c) $m = -1$ d) $\forall m \in \mathbb{R}$.

8 Cho 2 đường thẳng song song d : $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -t \end{cases}$ và d' : $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-1}$.

Phương trình mặt phẳng chứa d_1 và d_2 là :

a) $x + 2z + 5 = 0$ b) $x - 2z - 5 = 0$

c) $x + 2z - 5 = 0$ d) $x - 2z + 5 = 0$.

9 Cho 2 đường thẳng cắt nhau d : $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$ và d' : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4 + 5t. \end{cases}$

Phương trình mặt phẳng chứa d, d' là :

a) $x - 2y - z + 2 = 0$ b) $x - 2y - z - 2 = 0$

c) $x + 2y - z - 2 = 0$ d) $x + 2y - z + 2 = 0$.

10 Cho hai đường thẳng chéo nhau d, d'. Gọi (α) là mặt phẳng chứa d và song song d'. Gọi (β) là mặt phẳng chứa d' và song song d. Khoảng cách giữa 2 đường d, d' :

a) Bằng khoảng cách từ d' đến mp(α)

b) Bằng khoảng cách từ d' đến mp(β)

c) Bằng khoảng cách từ mp(α) đến mp(β)

d) Các kết quả a, b, c đều đúng.

11 Cho A(1, 1, 0); B(2, −1, 1). Khoảng cách từ trục hoành đến đường thẳng AB bằng :

a) $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{5}$.

12 Cho M(1, 0, 0); N(0, 1, 0); H(1, 1, 0); K(0, 0, 2). Khoảng cách giữa 2 đường thẳng MN và HK bằng :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{2}$ c) 1 d) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

13 Khoảng cách giữa 2 đường thẳng

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad d' : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1} \quad \text{bằng :}$$

a) $\sqrt{6}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ d) $\sqrt{2}$.

$\boxed{14}$ Cho d : $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$, d' : $\frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

Đường vuông góc chung của d và d' cắt d và d' lần lượt tại :

a) M(7, 3, 9); H(0, 1, 1) b) M(7, 3, 9); N(3, 1, 1)

c) H(0, 1, 1); N(3, 1, 1) d) N(3, 1, 1); K(0, −11, 16).

$\boxed{15}$ Cho hai đường thẳng cố định và chéo nhau d và d' có khoảng cách bằng 1. Trên d lấy hai điểm cố định A và B mà AB = 2. Lấy M di động trên d' thì diện tích ΔMAB nhỏ nhất bằng :

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 2 d) 4.

TRẢ LỜI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

$\boxed{1}$ Ta có VTCP $\vec{a} = (1, 1, -1)$ cùng phương $\vec{b} = (-2, -2, 2)$.

Mặt khác I(1, −1, 2) ∈ d' mà I ∉ d' vì $\frac{0}{1} \neq \frac{-3}{1} \neq +1$

Vậy d // d'. Chọn b.

$\boxed{2}$ Ta có VTCP $\vec{a} = (2, 1, 3)$ không cùng phương VTCP $\vec{b} = (1, 2, 3)$.

Vậy d, d' cắt hoặc chéo nhau.

Mặt khác hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2t = 2 + t \\ 2 + t = -3 + 2t' \\ 3t - 3 = 1 + 3t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - t' = 2 \\ t - 2t' = -5 \\ 3t - 3t' = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t' = 4 \\ t - t' = -1 \neq \frac{4}{3} \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

Vậy d, d' chéo nhau. Chọn c.

Cách khác : d qua A(0, 2, −3), d' qua B(2, −3, 1)

Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = (-3, -3, 3)$

$\overrightarrow{AB} = (2, -5, 4)$

Do $[\vec{a}, \vec{b}]\overrightarrow{AB} = 21 \neq 0$. Chọn c.

$\boxed{3}$ Thay phương trình d vào phương trình d' ta có :

$$\begin{cases} 18t - 15t - 3(t-3) - 9 = 0 \\ 9t - 10t + t - 3 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0t = 0 \\ 0t = 0 \end{cases}$$

Vô số nghiệm. Vậy d ≡ d'. Chọn d.

$\boxed{4}$ d qua A(1, 7, 3); VTCP $\vec{a} = (2, 1, 4)$

d' qua B(6, –1, –2); VTCP $\vec{b} = (3, -2, 1)$

Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = (9, 10, -7)$ và $\overrightarrow{AB} = (5, -8, -5)$

Do $\begin{cases} [\vec{a}, \vec{b}]\overrightarrow{AB} = 45 - 80 + 35 = 0 \\ [\vec{a}, \vec{b}] \neq 0 \end{cases}$ Vậy d cắt d'. Chọn a.

$\boxed{5}$ d qua A(5, 1, 5); VTCP $\vec{a} = (2, -1, -1)$

d' qua B(–3, 0, 4); VTCP $\vec{b} = (-2, 1, 1)$

Ta có $\vec{a} = -\vec{b}$ và $\overrightarrow{AB} = (-8, -1, -1)$ không cùng phương $\vec{a}$.

Vậy d // d'. Chọn b.

$\boxed{6}$ Thay phương trình d vào phương trình d' :

$$\begin{cases} 4(-3 + 2t) + (3t - 2) = 19 \\ (3t - 2) + 4(4t + 6) = 79 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11t = 33 \\ 19t = 57 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3$$

Vậy d cắt d' tại (3, 7, 18). Chọn c.

$\boxed{7}$ Thay phương trình d vào phương trình d' :

$$\begin{cases} 2(1 + mt) + t = 4 \\ 1 + mt + 1 - 2t + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m + 1)t = 2 \\ (m - 2)t = -4 \end{cases}$$

d cắt d' $\Leftrightarrow$ Hệ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \dfrac{1}{2} \wedge m \neq 2 \\ \dfrac{2}{2m + 1} = \dfrac{-4}{m - 2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 0. \quad \text{Chọn a.}$$

$\boxed{8}$ d qua A(5, 1, 0); VTCP $\vec{a} = (2, -1, -1)$

d' qua B(3, –3, 1); VTCP $\vec{b} = (2, -1, -1)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2, -4, 1)$

PVT $\vec{n} = [\vec{a}, \overrightarrow{AB}] = -5(1, 0, 2)$

Phương trình mp (d, d') : $1(x - 5) + 0 + 2(z - 0) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2z - 5 = 0$. Chọn c.

$\boxed{9}$ d có VTCP $\vec{a} = (1, -2, -3)$

d' có VTCP $\vec{b} = (1, 2, 5)$ và qua A(0, 1, 4)

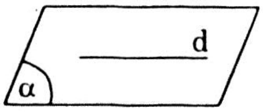
$\Rightarrow$ PVT $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = (-4, -8, 4) = -4(1, 2, -1)$

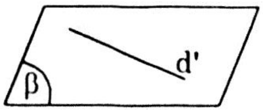
Phương trình mp (d, d') : $1(x-0) + 2(y-1) - 1(z-4) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x + 2y - z + 2 = 0$. Chọn d.

10 Các cách tính a, b, c đều đúng.

Chọn d.





11 Ta có $\overrightarrow{AB} = (1, -2, 1)$

$\vec{i} = (1, 0, 0)$ là VTCP của x'Ox

$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \vec{i}\,] = (0, 1, 2)$ và $\overrightarrow{OA} = (1, 1, 0)$

Vậy $\delta(x'Ox, AB) = \dfrac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{i}\,]\overrightarrow{OA}|}{[\overrightarrow{AB}, \vec{i}\,]} = \dfrac{|1|}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Chọn b.

12 Ta có $\overrightarrow{MN} = (-1, 1, 0)$; $\overrightarrow{HK} = (-1, -1, 2)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{HK}] = (2, 2, 2)$ và $\overrightarrow{MH} = (0, 1, 0)$

$\delta(MN, HK) = \dfrac{|[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{HK}].\overrightarrow{MH}|}{|[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{HK}]|} = \dfrac{|2|}{\sqrt{4+4+4}} = \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Chọn d.

13 d qua A(1, –1, 1); VTCP $\vec{a} = (2, -1, 0)$

d' qua B(2, –2, 3); VTCP $\vec{b} = (-1, 1, 1)$

Ta có : $[\vec{a}, \vec{b}] = (-1, -2, 1)$; $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 2)$

$\delta(d, d') = \dfrac{|-1+2+2|}{\sqrt{1+4+1}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{6} = \dfrac{1}{2}\sqrt{6}$. Chọn b.

14 Loại a và c vì $H(0, 1, 1) \notin d \cup d'$. Xét b.

Ta có $M \in d$, $N \in d'$ và $\overrightarrow{MN} = (-4, -2, -8) = -2(2, 1, 4)$

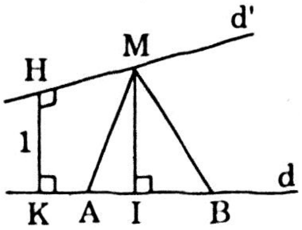
$\overrightarrow{MN} \perp \vec{a} = (1, 2, -1)$ vì $2 + 2 - 4 = 0$

$\overrightarrow{MN} \perp \vec{b} = (-7, 2, 3)$ vì $-14 + 2 + 12 = 0$

Vậy chọn b.

15 $S = Dt\,(\Delta MAB) = \dfrac{1}{2}MI.AB = MI \geq HK = 1$

Vậy $S_{min} = 1$. Chọn b.



Bài 6

MẶT CẦU

Vấn đề 1 : VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

- ***Dạng 1 :*** *Phương trình mặt cầu tâm I(a, b, c), bán kính R :*

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

- ***Dạng 2 :*** *Phương trình* $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

là phương trình mặt cầu tâm I(a, b, c), bán kính

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}.$$

BÀI TẬP

Bài 1. *Tuyển sinh Đại học khối D 2004*

Cho A(2, 0, 1); B(1, 0, 0); C(1, 1, 1) và mặt phẳng (P) : x + y + z – 2 = 0

Viết phương trình mặt cầu qua A, B, C và tâm nằm trên (P).

GIẢI

Gọi I(a, b, c) là tâm mặt cầu (S)

Ta có $\begin{cases} IA = IB = IC \\ I \in (P) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + b^2 + (c-1)^2 = (a-1)^2 + b^2 + c^2 \\ (a-2)^2 + b^2 + (c-1)^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \\ a + b + c = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ a - b = 1 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

Vậy I(1, 0, 1) và R = IB = 1

Vậy phương trình mặt cầu (S) : $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$. ■

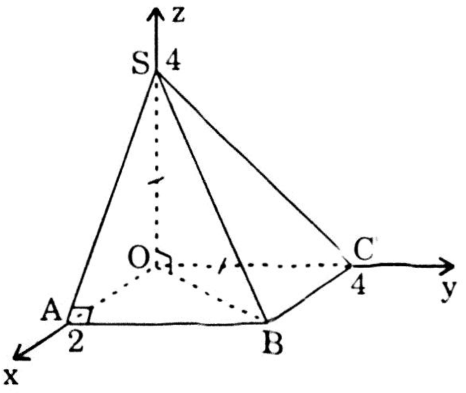
Bài 2. *Đề Dự bị khối A 2005*

Cho A(2, 0, 0); C(0, 4, 0); S(0, 0, 4).

Gọi B là điểm trên mp(Oxy) sao cho OABC là hình chữ nhật.

Viết phương trình mặt cầu qua O, A, B, S, C.

GIẢI



Ta có : B(2, 4, 0)

Do định lí 3 đường vuông góc :

$BC \perp OC \quad \Rightarrow \quad BC \perp SC$

$AB \perp OA \quad \Rightarrow \quad AB \perp SA$

Ta có : $\widehat{SAB} = \widehat{SOB} = \widehat{SCB} = 1$ vuông

Ba điểm A, O, C cùng nhìn SB dưới 1 góc vuông vậy cùng nằm trên mặt cầu đường kính SB, tâm I là trung điểm SB.

Ta có : I(1, 2, 2); $\quad R = OI = \sqrt{1+4+4} = 3$

Phương trình mặt cầu qua O, A, B, S, C là :

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 0. \quad ■$$

Bài 3. Cho A(1, 1, 1); B(1, 2, 1); C(1, 1, 2); D(2, 2, 1)

a) Viết phương trình đường vuông góc chung của AB và CD.

b) Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD.

GIẢI

a) Ta có : $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0)$; $\overrightarrow{CD} = (1, 1, -1)$

Ta có : $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (-1, 0, -1)$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng (AB) nhận $\vec{a}$ là VTCP.

$\Rightarrow \quad$ PVT $\vec{n}_P = [\overrightarrow{AB}, \vec{a}] = (-1, 0, 1)$

Phương trình mặt phẳng (P) là : $-(x-1) + (z-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - z = 0$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (CD) và nhận $\vec{a}$ là VTCP :

$\Rightarrow \quad$ PVT là $[\overrightarrow{CD}, \vec{a}] = (-1, 2, 1)$

Phương trình mặt phẳng (Q) là : $(x-1)(-1) + (y-1) + (z-2)(+1) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad -x + 2y + z - 3 = 0$$

Phương trình đường vuông góc chung là : $\begin{cases} x - z = 0 \\ x - 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$.

b) Phương trình mặt cầu có dạng : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

$A \in (S) \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 2a + 2b + 2c - d$

$B \in (S) \quad \Leftrightarrow \quad 6 = 2a + 4b + 2c - d$

$C \in (S) \quad \Leftrightarrow \quad 6 = 2a + 2b + 4c - d$

$D \in (S) \quad \Leftrightarrow \quad 9 = 4a + 4b + 2c - d$

Giải hệ phương trình ta được : $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = \frac{3}{2}$, $d = 6$

Vậy phương trình (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$. ■

Bài 4. Cho tứ diện với đỉnh A(2, 0, 0); B(0, 4, 0); C(0, 0, 6); D(2, 4, 6).

Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho :

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = 4$$

Viết phương trình tập hợp đó.

GIẢI

Gọi G là trọng tâm tứ diện ABCD.

Do $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$

$$\text{Ta có } G \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} = 1 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} = \dfrac{8}{4} = 2 \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} = \dfrac{12}{4} = 3 \end{cases}$$

Vậy $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = 4$

$\Leftrightarrow |4\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}| = 4$

$\Leftrightarrow |4\overrightarrow{MG}| = 4 \Leftrightarrow MG = 1$

Vậy tập hợp các điểm M là mặt cầu tâm G, bán kính R = 1 có phương trình : $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$. ■

Bài 5. Cho bốn điểm A(1, 2, 2); B (–1, 2, –1); C(1, 6, –1); D(–1, 6, 2).

a) Chứng minh ABCD là tứ diện có các cặp cạnh đối bằng nhau.

b) Xác định tọa độ trọng tâm tứ diện.

c) Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp tứ diện ABCD.

GIẢI

a) Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, -3)$; $\overrightarrow{AD} = (-2, 4, 0)$; $\overrightarrow{AC} = (0, 4, -3)$

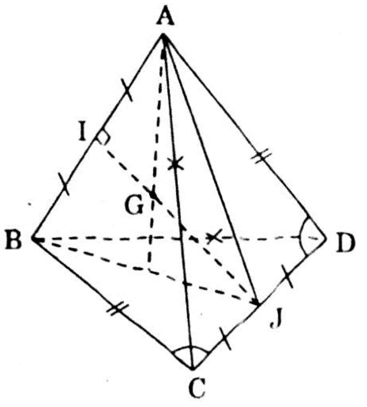
$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (12, -6, -8) = 2(6, -3, -4)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AD} = -24 - 24 \neq 0$ Vậy ABCD là tứ diện.

Mặt khác : $AB = CD = \sqrt{13}$, $AC = BD = 5$, $AD = BC = 2\sqrt{5}$

Do đó ABCD là tứ diện có các cặp cạnh đối bằng nhau.

b) Gọi G là trọng tâm tứ diện ABCD thì :



$$G:\begin{cases} x_G = \dfrac{x_a + x_B + x_C + x_D}{4} = \dfrac{1-1+1-1}{4} = 0 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} = \dfrac{2+2+6+6}{4} = 4 \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} = \dfrac{2-1-1+2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Do đó $G\left(0,\ 4,\ \dfrac{1}{2}\right)$.

c) Do ABCD là tứ diện có các cặp cạnh đối bằng nhau trên tâm mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp của tứ diện ABCD là trọng tâm G.

* Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD thì :

$$R = GA = \sqrt{1^2 + 2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

Do đó phương trình mặt cầu ngoại tiếp ABCD là :

$$x^2 + (y-4)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$$

* Mặt phẳng (ABC) qua A và có PVT $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ là :

$$6(x-1) - 3(y-2) - 4(z-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x - 3y - 4z + 8 = 0$$

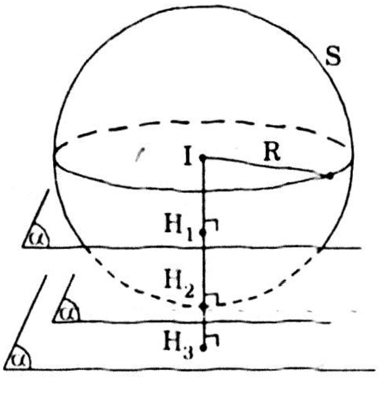
Bán kính r mặt cầu nội tiếp tứ diện ABCD là :

$$r = \delta(G, (ABC)) = \frac{\left|6(0) - 3(4) - 4\left(\frac{1}{2}\right) + 8\right|}{\sqrt{36+9+16}} = \frac{6}{\sqrt{61}}$$

Do đó phương trình mặt cầu nội tiếp tứ diện ABCD là :

$$x^2 + (y-4)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{36}{61}. \quad ■$$

Vấn đề 2 : VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA MẶT PHẲNG VÀ MẶT CẦU



Phương pháp :

Cho mặt cầu (S) có phương trình :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad (1)$$

(với $(a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$

và mặt phẳng (α) : $Ax + By + Cz + D = 0$ (2)

- $\boldsymbol{d = \delta(I, \alpha) > R} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{(S) \cap (\alpha) = \varnothing}$

- ***$d = \delta(I, \alpha) = R$ $\Leftrightarrow$ (S) tiếp xúc mặt phẳng (α)***
- ***$d = \delta(I, \alpha) < R$ $\Leftrightarrow$ (α) cắt (S) theo giao tuyến đường tròn có phương trình $\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases}$***

Chú ý :

+ *Phương trình mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu (S) có phương trình (1) tại $M(x_o, y_o, z_o) \in (S)$ là :*

$$xx_o + yy_o + zz_o - a(x + x_o) - b(y + y_o) - c(z + c_o) + d = 0$$

+ *Mọi đường thẳng nằm trên tiếp diện và qua tiếp điểm $M(x_o, y_o, z_o)$ đều là tiếp tuyến của (S).*

BÀI TẬP

Bài 6. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu có phương trình :

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z - 2 = 0$$

và song song mặt phẳng : $4x + 3y - 12z + 1 = 0$.

GIẢI

(S) có tâm I(1, 2, 3), bán kính R = 4

Mặt phẳng cần tìm song song mặt phẳng : $4x + 3y - 12z + 1 = 0$ nên có dạng : $4x + 3y - 12z + c = 0$ (α)

$$(\alpha) \text{ tiếp xúc (S)} \Leftrightarrow \delta(I, \alpha) = R \Leftrightarrow \frac{|4(1) + 3(2) - 12(3) + c|}{\sqrt{16 + 9 + 144}} = 4$$

$$\Leftrightarrow |c - 26| = 4.13$$

$$\Leftrightarrow c - 26 = \pm 52 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 78 \\ c = -26 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình 2 mặt phẳng cần tìm :

$4x + 3y - 12z + 78 = 0$ hay $4x + 3y - 12z - 26 = 0$. ■

Bài 7. *Tuyển sinh khối B 2005*

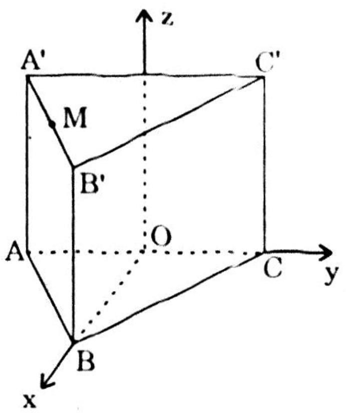
Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' với A(0, –3, 0); B(4, 0, 0); C(0, 3, 0); B'(4, 0, 4).

a) Viết phương trình mặt cầu tâm A tiếp xúc mp(BCC'B').

b) Gọi M là trung điểm A'B'. Viết phương trình mp(P) qua A, M và song song BC'. Mp(P) cắt A'C' tại N. Tính MN.

GIẢI

a) Ta có : A'(0, –3, 4); C'(0, 3, 4)



$\overrightarrow{BC} = (-4, 0, 3)$; $\overrightarrow{BB'} = 4(0, 0, 1)$

$\Rightarrow$ PVT $\vec{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB'}] = 4(3, 4, 0)$

Phương trình mp(BCC'B') :

$$3(x - 4) + 4(y - 0) + 0(z - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x + 4y - 12 = 0$$

Do điều kiện tiếp xúc :

$$R = \delta(A, mp(BCC'B')) = \frac{|-12 - 12|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{24}{5}$$

Vậy phương trình (S) : $x^2 + (y + 3)^2 + z^2 = \dfrac{576}{25}$.

b) Ta có $M\left(2, -\dfrac{3}{2}, 4\right)$. Mp (P) có VTCP $\overrightarrow{AM} = \left(2, \dfrac{3}{2}, 4\right)$ và $\overrightarrow{BC'} = (-4, 3, 4)$

Vậy PVT $\vec{m} = -6(1, 4, -2)$

Phương trình mp(P) : $1(x - 0) + 4(y + 3) - 2(z - 0) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x + 4y - 2z + 12 = 0$$

Phương trình A'C' là : $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + t \\ z = 4 \end{cases}$

$N \in A'C' \quad \Rightarrow \quad \exists t : M(0, -3 + t, 4)$

$N \in (P) \quad \Rightarrow \quad 0 + 4(t - 3) - 8 + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2$

Vậy N(0, –1, 4) và $MN = \sqrt{(-2)^2 + \left(\dfrac{3}{2} - 1\right)^2 + 0} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$. ■

Bài 8. Cho đường thẳng (d) : $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$

và 2 mặt phẳng $(P_1) : x + 2y + 2z + 3 = 0$; $(P_2) : x + 2y + 2z + 7 = 0$

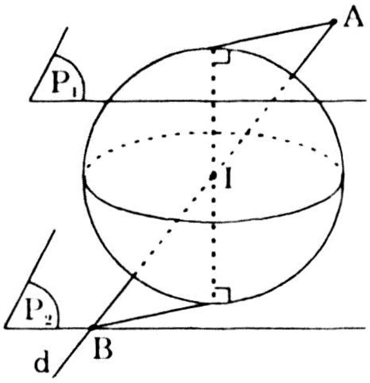
Viết phương trình mặt cầu tâm $I \in (d)$ và tiếp xúc 2 mặt phẳng (P_1), (P_2).

GIẢI

- ***Cách 1 :*** Tọa độ giao điểm A của (d) và (P_1) là nghiệm hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x - y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = -3 \end{cases} \qquad \text{Vậy } A(1, -1, -1)$$

Tọa độ giao điểm B của (d) và (P_2) là nghiệm hệ phương trình :



$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = -7 \end{cases} \qquad \text{Vậy } B(5, -1, -5)$$

Do (P_1) // (P_2) nên tâm I là trung điểm AB

$\Rightarrow$ I(3, −1, −3)

bán kính $R = \delta(I, D_1) = \dfrac{|3 - 2 - 6 + 3|}{\sqrt{9}} = \dfrac{2}{3}$

Vậy phương trình mặt cầu là : $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = \dfrac{4}{9}$.

- ***Cách 2 :*** Gọi I(a, b, c) là tâm mặt cầu.

(S) tiếp xúc (P_1), (P_2) $\Leftrightarrow$ $\delta(I, P_1) = \delta(I, P_2) = R$

Do đó : $\dfrac{|a + 2b + 2c + 3|}{\sqrt{9}} = \dfrac{|a + 2b + 2c + 7|}{\sqrt{9}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + 2b + 2c + 3 = a + 2b + 2c + 7 \text{ (vô nghiệm)} \\ a + 2b + 2c + 3 = -(a + 2b + 2c + 7) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$ $a + 2b + 2c + 5 = 0$ (1)

Mà $I \in (d) \Rightarrow \begin{cases} a + b + c + 1 = 0 & (2) \\ a - b + c - 1 = 0 & (3) \end{cases}$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ a = 3, b = −1, c = −3.

Ta có : $R = \delta(I, P_1) = \dfrac{|3 - 2 - 6 + 3|}{\sqrt{9}} = \dfrac{2}{3}$

Do đó phương trình mặt cầu (S) là : $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z + 3)^2 = \dfrac{4}{9}$. ■

Bài 9. Cho đường thẳng (d) : $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y - 1}{1} = \dfrac{z + 1}{2}$

và mặt phẳng (P) : $x + y - 2z + 5 = 0$, mặt phẳng (Q) : $2x - y + z + 2 = 0$

Viết phương trình mặt cầu tâm nằm trên (d) và tiếp xúc (P), (Q).

GIẢI

Gọi I(a, b, c) là tâm mặt cầu

Do $I \in d$ nên : $\begin{cases} a - 2b = -2 & (1) \\ a - c = 1 & (2) \end{cases}$

Do (S) tiếp xúc (P) và (Q) nên $\delta(I, (P)) = \delta(I, (Q)) = R$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{|a + b - 2c + 5|}{\sqrt{6}} = \frac{|2a - b + c + 2|}{\sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a + b - 2c + 5 = 2a - b + c + 2 \\ a + b - 2c + 5 = -2a + b - c - 2 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} a - 2b + 3c = 3 & (3) \\ 3a - c = -7 & (3') \end{array}\right.$$

Từ (1) (2) (3) ta được $I_1\left(\frac{8}{3}, \frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

$$\text{Do đó :} \quad R_1 = \delta(I, (P)) = \frac{\left|\frac{8}{3} + \frac{7}{3} - \frac{10}{3} + 5\right|}{\sqrt{6}} = \frac{20}{3\sqrt{6}}$$

Từ (1) (2) (3') ta được $I_2(-4, -1, -5)$.

$$\text{Do đó :} \quad R_2 = \delta(I, (P)) = \frac{|-4 - 1 + 10 + 5|}{\sqrt{6}} = \frac{10}{\sqrt{6}}$$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là :

$$\left[\begin{array}{l} \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{200}{27} \\ (x + 4)^2 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2 = \frac{50}{3}. \end{array}\right. \quad \blacksquare$$

Bài 10. Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng

$$(d) : \left\{\begin{array}{l} 8x - 11y + 8z - 30 = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{array}\right.$$

và tiếp xúc mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$.

GIẢI

Phương trình chùm mặt phẳng chứa (d) là :

$$m(8x - 11y + 8z - 30) + n(x - y - 2z) = 0 \qquad (m^2 + n^2 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (8m + n)x - (11m + n)y + (8m - 2n)z - 30m = 0$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1, 3, -2)$ và $R = \sqrt{1 + 9 + 4 + 15} = \sqrt{29}$

Gọi (P) là mặt phẳng thuộc chùm mà tiếp xúc mặt cầu (S)

Ta có : $\delta(I, P) = R$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{|-(8m + n) - 3(11m + n) - 2(8m - 2n) - 30m|}{\sqrt{(8m + n)^2 + (11m + n)^2 + (8m - 2n)^2}} = \sqrt{29}$$

$$\Leftrightarrow \quad |87m| = \sqrt{29} \, . \sqrt{249m^2 + 6n^2 + 6mn}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2m^2 - mn - n^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{n \pm 3n}{4} = \left\langle \begin{array}{l} n \\ -\dfrac{n}{2} \end{array} \right.$$

$m = n$ Chọn $m = n = 1$

$m = -\frac{n}{2}$ Chọn $n = 2$ và $m = -1$

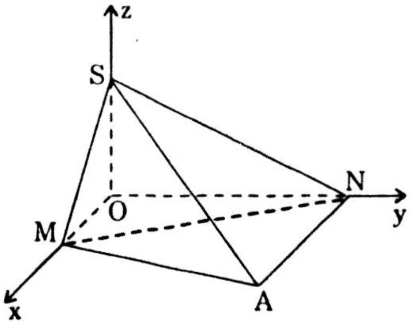
Vậy phương trình 2 mặt phẳng cần tìm là : $\left[\begin{array}{l} 3x - 4y + 2z - 10 = 0 \\ 2x - 3y + 4z - 10 = 0 \end{array}\right.$ ■

Bài 11. Cho S(0, 0, 1); A(1, 1, 0). Hai điểm M(m, 0, 0); N(0, n, 0) thay đổi sao cho $m + n = 1$ và $m > 0$, $n > 0$.

a) Chứng minh thể tích hình chóp S.OMAN không phụ thuộc m, n.

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SMN). Từ đó suy ra mặt phẳng (SMN) tiếp xúc 1 mặt cầu cố định.

GIẢI



a) Dt (Δ vuông OMN) = $\frac{1}{2}$OM.ON = $\frac{mn}{2}$

Ta có : $\overrightarrow{AM} = (m - 1, -1, 0)$

$\overrightarrow{AN} = (-1, n - 1, 0)$

$\Rightarrow \quad [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] = (0, 0, mn - 1)$

Vậy $S_{(\Delta AMN)} = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}]| = \frac{1}{2}|mn - 1| = \frac{1 - mn}{2}$ (do m, n < 1)

Do đó $S_{(OMAN)} + S_{(\Delta AMN)} = \frac{mn}{2} + \frac{1 - mn}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad V_{S.OAMN} = \frac{1}{3}SO.S_{(OMAN)} = \frac{1}{3}.1.\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ hằng số.

b) Phương trình mặt phẳng (SMN) là :

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad nx + my + mnz - mn = 0$$

Do đó $\delta(A, (SMN)) = \dfrac{|n(1) + m(1) + mn(0) - mn|}{\sqrt{m^2 + n^2 + m^2n^2}}$

$$\Rightarrow \quad \delta(A, (SMN)) = \frac{|m + n - mn|}{\sqrt{(m + n)^2 - 2mn + m^2n^2}}$$

$$= \frac{|1 - mn|}{\sqrt{1 - 2mn + m^2n^2}} = \frac{|1 - mn|}{\sqrt{(1 - mn)^2}} = 1$$

Do đó mặt phẳng (SMN) luôn tiếp xúc mặt cầu cố định tâm A, bán kính R = 1. ■

***CHÚ Ý :* Phương pháp tìm tâm và bán kính đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (I, R)**

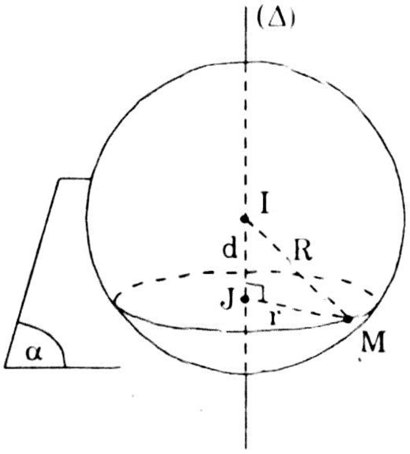
- + Tính $d = \delta(I, (\alpha))$. Do $d < R$ nên (S) cắt (α) theo giao tuyến là 1 đường tròn tâm (J, r).
- + Viết phương trình đường thẳng (Δ) qua I và vuông góc với mặt phẳng (α).

  Tìm giao điểm của (Δ) và mặt phẳng (α) đó là tâm J.
- + Bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

Bài 12. Tìm tâm và bán kính của đường tròn có phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) - 22 = 0 \\ 3x - 2y + 6x + 14 = 0 \end{cases}$$

GIẢI



Xét (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) - 22 = 0$

Vậy (S) có tâm I(1, 1, 1), bán kính R = 5.

Phương trình đường thẳng (Δ) qua I và vuông góc mặt phẳng (α) : $3x - 2y + 6z + 14 = 0$ là :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 6t \end{cases}$$

Thay vào phương trình mặt phẳng (α) ta được :

$$3(1 + 3t) - 2(1 - 2t) + 6(1 + 6t) + 14 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{3}{7}$$

Vậy $J\left(-\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{11}{7}\right)$.

Ta có : $d = \delta(I, mp(\alpha)) = \dfrac{|3 - 2 + 6 + 14|}{\sqrt{9 + 4 + 36}} = \dfrac{21}{7} = 3$

Vậy R' là bán kính đường tròn giao tuyến.

$$R' = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = 4. \quad ■$$

Bài 13. Cho đường tròn (C) : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 6z + 17 = 0 \\ x - 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

a) Tìm tâm và bán kính của (C).

b) Lập phương trình mặt cầu chứa đường tròn (C) và tâm nằm trên mặt phẳng : $x + y + z + 3 = 0$.

GIẢI

a) Xét (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 6z + 17 = 0$

Tâm mặt cầu S là $I(2, -3, -3)$, $R = \sqrt{4 + 9 + 9 - 17} = \sqrt{5}$

Gọi (d) là đường thẳng qua I và vuông góc với mp(P) : $-2y + 2z + 1 = 0$

Phương trình (d) là : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$

Thay vào phương trình (P), ta được :

$$(2 + t) + 2(3 + 2t) + 2(-3 + 2t) + t = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9t + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{1}{3}$$

Do đó (d) cắt (P) tại $J\left(\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{11}{3}\right)$ đó là tâm đường tròn (C).

Gọi r là bán kính (C). Ta có : $IJ^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = 1$

$$r^2 = R^2 - IJ^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad r = 2$$

b) Tâm I' mặt cầu (S') cần tìm chính là giao điểm (d) và mặt phẳng (Q) : $x + y + z + 3 = 0$

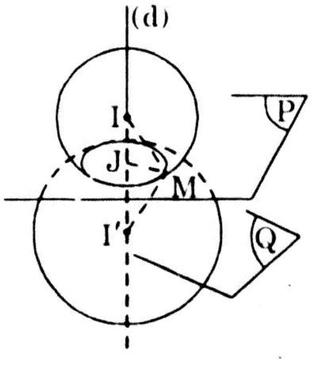
Ta có : $2 + t - 3 - 2t - 3 + 2t + 3 = 0 \Rightarrow t = 1$

Vậy tâm $I'(3, -5, -1)$.

Ta có : $I'J^2 = \left(3 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(-1 + \frac{11}{3}\right)^2 = 16$

Vậy R' bán kính của (S') :

$$R'^2 = I'J^2 + r^2 = 16 + 4 = 20$$



Phương trình (S') : $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 + (z + 1)^2 = 20$. ■

Bài 14. *Tuyển sinh Đại học khối B 2007*

Cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y + 2z - 3 = 0$

và mp (P) : $2x - y + 2z - 14 = 0$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo đường tròn có bán kính bằng 3.

b) Tìm M trên (S) sao cho khoảng cách từ M đến mp (P) lớn nhất.

GIẢI

a) (S) có tâm $I(1, -2, -1)$ và $R = 3$.

Phương trình mp(Q) chứa Ox có dạng : $my + nz = 0$ $(m^2 + n^2 \neq 0)$

(Q) cắt (S) theo đường tròn có $r = R = 3$.

Vậy $I \in (Q) \quad \Rightarrow \quad -2m - n = 0 \quad \Rightarrow \quad n = -2m$

Chọn $m = 1$ thì $n = -2$

Vậy phương trình (Q) : $y - 2z = 0$.

b) Ta có : $\delta(I, (P)) = 4 > R = 3$

Vậy $(S) \cap (P) = \varnothing$

Phương trình đường thẳng d qua I và ⊥ (P) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

Thay vào phương trình (S) ta được $t = \pm 1$.

Vậy d cắt (S) tại A(3, −3, 1); B(−1, −1, 3)

Mà $\delta(A, (P)) = 1 < \delta(B, (P)) = 7$

Do đó $\delta(M, (P))$ max $\Leftrightarrow$ M(−1, −1, 3). ■

Vấn đề 3 : VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT CCẦU

Phương pháp :

Cho mặt cầu (S) tâm I, bán kính R và đường thẳng (Δ)

Tính $d = \delta(I, (\Delta))$

(Δ) cắt (S) tại hai điểm $\Leftrightarrow$ $\delta(I, (\Delta)) < R$

(Δ) tiếp xúc (S) $\Leftrightarrow$ $\delta(I, (\Delta)) = R$

(Δ) và (S) không có điểm chung $\Leftrightarrow$ $\delta(I, (\Delta)) > R$.

Ghi chú :

- *Nếu phương trình (d) ở dạng tham số ta giải hệ phương trình tìmm gia điểm của (S) và (d).*
- *Từ số nghiệm của hệ ta biết được vị trí tương đối.*

Bài 15. Cho mặt cầu (S) : $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 26$

và đường thẳng (d) : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - 5t \\ z = -4 + 5t \end{cases}$

a) Tìm tọa độ giao điểm A, B của (d) và (S).

b) Viết phương trình các mặt phẳng tiếp xúc (S) tại A và B.

GIẢI

a) Thay x, y, z của phương trình (d) vào phương trình (S), ta được :

$$3^2 + (1 - 5t)^2 + (5t - 4)^2 = 26 \quad \Leftrightarrow \quad 50t^2 - 50t = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t = 0 \vee t = 1$$

Vậy (d) cắt (S) tại A(1, 2, −4); B(1, −3, 1).

b) (S) có tâm I(−2, 1, 0)

Mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) tại A nên vuông góc IA tại A. Vậy (α) qua A và có PVT $\overrightarrow{IA} = (3, 1, -4)$.

Phương trình (α) là : $3(x - 1) + 1(y - 2) - 4(z + 4) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 3x + y - 4z - 21 = 0$$

Tương tự mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại B có phương trình :

$$3x - 4y + z - 16 = 0.$$ ■

Bài 16. Trong không gian Oxyz cho I(2, 3, −1) và đường thẳng (d) :

$$\begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0 \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \end{cases}$$

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) qua I và vuông góc (d).

b) Tính khoảng cách từ I đến (d). Suy ra phương trình mặt cầu (S) tâm I sao cho (S) cắt (d) tại A, B thỏa AB = 10.

GIẢI

a) $$\left.\begin{aligned} \vec{n}_1 &= (5, -4, 3) \\ \vec{n}_2 &= (3, -4, 1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{VTCP } \vec{v}_d = (8, 4, -8) = 4(2, 1, -2)$$

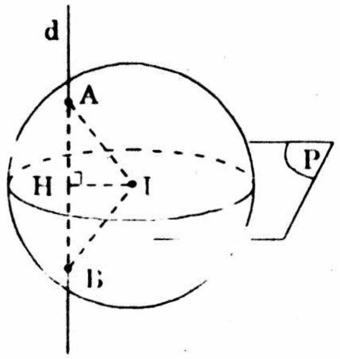
Mặt phẳng (P) qua I và ⊥ (d) vậy (P) nhận $\vec{v}$ là PVT.

Phương trình (P) : $2(x - 2) + 1(y - 3) - 2(z + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 2x + y - 2z - 9 = 0$$

b) * Tọa độ giao điểm H của (d) và mặt phẳng (P) là nghiệm hệ phương trình :

$$\begin{cases} 5x - 4y + 3z = -20 \\ 3x - 4y + z = 8 \\ 2x + y - 2z = 9 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -7 \\ z = -11 \end{cases}$$



Vậy H(−3, −7, −11)

Do (d) vuông góc với mặt phẳng (P) ⇒ d ⊥ HI

Vậy : $\delta(I, d) = HI = \sqrt{25 + 100 + 100} = 15$

* A, B $\in$ (S) $\Rightarrow$ IA = IB = R

ΔBAI cân có IH là đường cao còn là trung tuyến nên : $HA = HB = \frac{AB}{2} = 5$

ΔHAI vuông tại H $\Rightarrow R^2 = AI^2 = HA^2 + HI \Rightarrow R^2 = 25 + 225 = 250$

Do đó phương trình mặt cầu (S) cần tìm là :

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 250. \quad \blacksquare$$

Bài 17. Cho mặt cầu (S) : $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = \frac{16}{9}$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) và vuông góc

$$(d) : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}.$$

b) Viết phương trình đường thẳng (Δ) tiếp xúc (S). Biết (Δ) vuông góc Oz và qua $A\left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$.

GIẢI

a) Do (α) $\perp$ (d) nên (α) nhận VTCP $\vec{a}_d = (1, 2, 2)$ làm PVT. Phương trình (α) dạng : $x + 2y + 2z + D = 0$.

(α) tiếp xúc (S) $\Leftrightarrow \delta(I, (\alpha)) = R \Leftrightarrow \frac{|-1+2-2+D|}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow |D - 1| = 4 \Leftrightarrow D = 5 \vee D = -3$

Vậy phương trình (α) là : $x + 2y + 2z + 5 = 0$

hay $x + 2y + 2z - 3 = 0$.

b) Gọi VTCP của (Δ) là $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

Do (Δ) $\perp$ Oz nên $\vec{v} \perp \vec{k} = (0, 0, 1) \Rightarrow v_3 = 0$

Ta có tâm I(−1, 1, −1) nên $\overrightarrow{IA} = \left(1, -1, \frac{4}{3}\right)$ mà $\vec{v} = (v_1, v_2, 0)$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{IA}, \vec{v}] = \left(-\frac{4}{3}v_2, \frac{4}{3}v_1, v_1 + v_2\right)$$

Vậy (Δ) tiếp xúc (S) $\Leftrightarrow d(I, (\Delta)) = R \Leftrightarrow \frac{|[\overrightarrow{IA}, \vec{v}]|}{|\vec{v}|} = R$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{\frac{16}{9}(v_2^2 + v_1^2) + (v_1 + v_2)^2}}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{16}{9}(v_1^2 + v_2^2) + (v_1 + v_2)^2 = \frac{16}{9}(v_1^2 + v_2^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(v_1 + v_2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = -v_2$$

Chọn $v_1 = 1 \wedge v_2 = -1$

Do đó phương trình chính tắc của (Δ) là : $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z - \frac{1}{3}}{0}$. ■

Vấn đề 4 : VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT CẦU

Phương pháp :

Cho hai mặt cầu : (S) tâm I, bán kính R và (S') tâm I', bán kính R'

$I'I < |R - R'| \quad \Leftrightarrow$ *(S) (S') lồng nhau*

$II' = |R - R'| \quad \Leftrightarrow$ ***(S) (S') tiếp xúc trong***

$II' = R + R' \quad \Leftrightarrow$ ***(S) (S') tiếp xúc ngoài***

$|R - R'| < II' < R + R' \quad \Leftrightarrow$ ***(S) (S') cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn***

$II' > R - R' \quad \Leftrightarrow$ *(S) (S') ở ngoài nhau*

Bài 18. Cho 2 mặt cầu $(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z = 0$

và $(S_2) : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z - 10 = 0$

a) Chứng minh (S_1) và (S_2) cắt nhau.

b) Tìm phương trình mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến và phương trình đường tròn giao tuyến.

GIẢI

a) (S_1) có tâm $I_1(1, -2, 2)$ và bán kính $R_1 = 3$.

(S_2) có tâm $I_2(-2, 1, -1)$ và bán kính $R_2 = 4$.

Ta có : $I_1I_2 = \sqrt{9 + 9 + 9} = 3\sqrt{3}$

Do $1 = |R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2 = 7$. Vậy (S_1) (S_2) cắt nhau.

b) Mặt đẳng phương của hai mặt cầu (S_1) (S_2) chính là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến.

Phương trình mặt phẳng này là :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z = x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z - 10$$

$$\Leftrightarrow \quad 6x - 6y + 6z - 10 = 0 \quad (\alpha)$$

Do đó phương trình đường tròn giao tuyến là :

$$(C) : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z = 0 \\ 3x - 3y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$ ■

Bài 19. Cho 2 mặt cầu : $(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

$(S_2) : x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 2y - 4\sqrt{2}z - 82 = 0$

a) Chứng minh (S_1), (S_2) tiếp xúc trong.

b) Viết phương trình tiếp diện chung của (S_1), (S_2).

GIẢI

a) Ta có tâm $I_1(2, 3, 0)$, bán kính $R_1 = \sqrt{4 + 9 - 4} = 3$

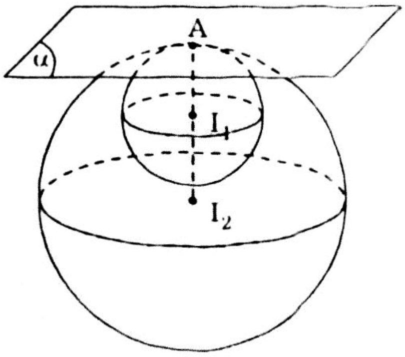
tâm $I_2(-3, -1, 2\sqrt{2})$, bán kính $R_2 = \sqrt{9 + 1 + 8 + 82} = 10$

$\Rightarrow \quad I_1I_2 = \sqrt{25 + 16 + 8} = 7$

và $\quad |R_2 - R_1| = 7$

Do $\quad I_1I_2 = |R_2 - R_1|$

Vậy (S_1) (S_2) tiếp xúc trong.



b) Mặt phẳng tiếp xúc chung của (S_1) và (S_2) chính là mặt đẳng phương của (S_1) và (S_2). Mặt này có phương trình là :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 4 = x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 2y - 4\sqrt{2}z - 82$$

$$\Leftrightarrow \quad 10x + 8y - 4\sqrt{2}z - 86 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5x + 4y - 2\sqrt{2}z - 43 = 0.$$ ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. *Dự bị khối A 2005*

Cho A(1, 1, 0); B(0, 2, 0); C(0, 0, 2). Viết phương trình mặt cầu qua O, A, B, C.

BT2. *Dự bị khối D 2005*

Cho lăng trụ đứng OAB.O'A'B' với A(2, 0, 0); B(0, 4, 0); O'(0, 0, 4).

a) Viết phương trình mặt cầu qua OABO'.

b) Gọi M trung điểm AB, (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc OA, (P) cắt OA và OA' tại N, K. Tính NK.

BT3. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD với S(3, 2, 4); B(1, 2, 3), D(3, 0, 3).

a) Lập phương trình đường vuông góc chung của AC và SD.

b) Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD. Lập phương trình mặt phẳng qua BI và song song AC.

c) Gọi H là trung điểm BD, G là trực tâm ΔSCD. Tính độ dài HG.

BT4. Cho A(0, 0, 4); B($2\sqrt{3}$, 2, 0); C(0, 4, 0). Gọi H là trực tâm ΔBCO và K là hình chiếu vuông góc của H xuống mặt phẳng (ABC).

a) Chứng minh ΔOBC đều và viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

b) Chứng minh K là trực tâm ΔABC.

c) Gọi N là giao điểm của 2 đường thẳng HK và OA. Tính tích số OA.ON.

BT5. Cho A(3, 0, 0); B(0, 3, 0); C(0, 0, 3) và H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (ABC).

a) Tính diện tích ΔABC và độ dài đoạn OH.

b) Gọi D là điểm đối xứng của H qua O. Chứng minh tứ diện ABCD là tứ diện đều và tính thể tứ diện ABCD.

c) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

BT6. Cho mặt phẳng (α) : $2x + 3y + 6z - 18 = 0$. Gọi A, B, C là giao điểm của (α) và 3 trục tọa độ.

a) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

b) Tìm điểm M(x, y, z) với x, y, z > 0 cách đều 4 mặt của tứ diện OABC. Suy ra phương trình mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC.

BT7. *Dự bị khối D 2003*

Cho mặt cầu (S) : $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$

và mp(α) : $2x + 2y + z - m^2 - 3m = 0$.

Tìm m để (α) tiếp xúc (S). Tìm tiếp điểm.

BT8. *Dự bị khối B 2006*

Cho A(0, 0, 4); B(2, 0, 0), mp(P) : $2x + y - z + 5 = 0$.

a) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của AB lên mp(P).

b) Viết phương trình mặt cầu qua O, A, B và tiếp xúc mp(P).

BT9. Tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn :

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z = 3)^2 = 5 \\ x - 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

BT10. Cho mặt cầu (S) : $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 9$

và mặt phẳng (P) : $x + 2y + 2z + 11 = 0$.

Tìm M nằm trên (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt cầu (S) ngắn nhất.

BT11. Lập phương trình mặt cầu tâm I(2, 3 , –1) và cắt đường thẳng

$$(d): \begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0 \\ 3x + 4y + z - 8 = 0 \end{cases} \text{ sao cho } AB = 8.$$

BT12. Cho đường thẳng $(d): \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{1}$

$$(P): 2x + y - 2z + 2 = 0.$$

a) Viết phương trình mặt cầu (C), bán kính R = 1, tâm nằm trên (d) và tiếp xúc (P).

b) Gọi M là giao điểm (d) và (P), T là giao điểm (P) và (C). Tính MT.

BT13. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 2 = 0$.

Tìm điểm A thuộc (S) sao cho khoảng cách từ A đến mặt phẳng

$(d): 2x - 2y + z + 6 = 0$ là lớn nhất.

BT14. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x + z = 2$.

a) Chứng minh (P) cắt (S). Tìm tọa độ tâm và bán kính của (C) là giao tuyến của (S) và (P).

b) Viết phương trình đường cong (C_1) là hình chiếu vuông góc của (C) lên mặt phẳng (Oxy).

BT15. Cho mặt phẳng $(\alpha): x - y - z + m = 0$ (m là tham số)

và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 4z = 0$

a) Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của (S).

b) Xét vị trí tương đối của (α) và (S) tùy theo giá trị tham số m.

c) Tìm tọa độ giao điểm của (S) với đường thẳng qua A(4, 6, 2); B(7, 0, –1) và viết phương trình của các mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại các giao điểm đó.

BT16. Cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 6$, hai đường thẳng :

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad (d_2): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu (S) đồng thời song song (d_1) và (d_2).

BT17. Cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 11$ và 2 đường thẳng :

$$(d_1): \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}; \quad (d_2): \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$$

a) Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc (S) đồng thời song song (d_1) và (d_2).

b) Viết phương trình đường thẳng (d) qua tâm I của mặt cầu và cắt (d_1), (d_2).

BT18. Cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$

và mặt phẳng (α) : $x + y - z + k = 0$

a) Biện luận theo k vị trí tương đối giữa (α) và (S).

b) Cho M(1, 1, 1); N(2, –1, 5). Tìm tọa độ giao điểm của (S) và đường thẳng MN. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc (S) tại các giao điểm đó.

BT19. Cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 4t \\ y = 3 - t \\ z = 4 \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 2t' \\ z = t' \end{cases}$

Viết phương trình mặt cầu nhận đoạn vuông góc chung của d_1, d_2 làm đường kính.

BT20. Cho 2 mặt cầu $(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$

và $(S_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 12y + 12z + 72 = 0$

Tìm phương trình mặt cầu có tâm nằm trên đường nối tâm của (S_1), (S_2) tiếp xúc 2 mặt cầu trên và có bán kính lớn nhất.

22 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

$\boxed{1}$ Cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 6z + 18 = 0$ thì (S) có tâm và bán kính là :

a) I(–2, 3, 3); R = 2 b) I(2, –3, –3); R = 4

c) I(–2, 3, 3); R = 4 d) I(2, –3, –3); R = 2.

$\boxed{2}$ Cho họ $(S_m) : x^2 + y^2 + z^2 - 2(m + 1)x - 2(m + 2)z + 6m + 7 = 0$.

(S_m) là mặt cầu khi và chỉ khi :

a) $-1 < m < 1$ b) $-1 \le m \le 1$

c) $m < -1 \vee m > 1$ d) $m \le -1 \vee m \ge 1$.

$\boxed{3}$ Cho A(1, 1, 0); B(0, 2, 0); C(0, 0, 2) thì mặt cầu qua O, A, B, C có tâm là :

a) $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ b) I(0, 1, 1) c) $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ d) $I\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$.

$\boxed{4}$ Cho A(1, 0, 0); B(1, 2, 0); C(0, 0, 2) thì mặt cầu qua O, A, B, C có bán kính R :

a) 3   b) $\frac{3}{2}$ c) 2   d) 1.

$\boxed{5}$ Mặt cầu tâm I(4, 2, –2) tiếp xúc (α) : $12x + 5z - 19 = 0$ thì có bán kính :

a) $R = 3$ b) $R = 4$ c) $R = 5$ d) $R = 1$.

$\boxed{6}$ Mặt cầu (S) tiếp xúc 2 mặt phẳng (α) : $2x - y + 2z - 1 = 0$

và (β) : $2x - y + 2z + 5 = 0$ thì có bán kính R :

a) 1   b) 2   c) 3   d) 4.

$\boxed{7}$ Cho mặt cầu (S) : $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = \frac{16}{9}$ và (d) : $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$.

Mặt phẳng α vuông góc d và tiếp xúc (S) là :

a) $x + 2y + 2z + 5 = 0$ b) $x + 2y + 2z - 3 = 0$

c) Hai kết quả a, b đều đúng   d) Hai kết quả a, b đều sai.

$\boxed{8}$ Cho mặt cầu (S) : $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 26$.

Phương trình mặt phẳng tiếp xúc (S) tại T(1, –3, 1) là :

a) $3x + 4y + z + 16 = 0$ b) $3x - 4y + z - 16 = 0$

c) $3x + 4y - z - 16 = 0$ d) $3x - 4y - z + 16 = 0$.

$\boxed{9}$ Cho mặt cầu (S) di động luôn tiếp xúc 2 mặt phẳng cố định (α), (β) và (S) luôn qua A cố định thì tập hợp các tâm I của (S) là :

a) Đường thẳng   b) Đường tròn

c) Mặt phẳng   d) Mặt cầu.

$\boxed{10}$ Cho (α) : $2x + 2y + z + 5 = 0$.

Mặt cầu (S) tâm I(1, 2, –2) cắt (S) theo một đường tròn có chu vi 8π thì bán kính mặt cầu (S) là :

a) $R = \sqrt{5}$ b) $R = 5$ c) $R = 9$ d) $R = 3$.

$\boxed{11}$ Cho (S) : $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 1$ thì mặt phẳng (P) chứa trục Oz và tiếp xúc (S) có phương trình :

a) $4x + 3z = 0$ b) $4x + 3y = 0$

c) $3x + 4y = 0$ d) $4x - 3y = 0$.

$\boxed{12}$ Cho (S) : $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$ tiếp xúc (P) : $2x + 2y + z - 10 = 0$ thì tiếp điểm T là :

a) T(3, 1, 2)   b) T(–3, 1, 2)

c) T(3, –1, 2)   d) T(3, 1, –2).

13 Cho đường tròn (C) : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 6z + 17 = 0 \\ x - 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

thì bán kính của (O) bằng :

a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) 4 d) 2.

14 Cho mặt cầu (S) : $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 11$ và đường thẳng

$$d : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}; \qquad d' : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}.$$

Phương trình mặt phẳng song song d_1, chứa d_2 và tiếp xúc (S) là :

a) $3x - y - z - 15 = 0$ b) $3x - y - z + 7 = 0$

c) Hai kết quả a, b đều sai d) Hai kết quả a, b đều đúng.

15 Cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$ và 3 điểm trên mặt cầu : A(1, 2, –3); B(–1, 2, 3); C(1, –3, 3) thì phương trình đường tròn qua A, B, C là :

a) $\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$

b) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 1$

c) $\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 5 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$

d) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$.

16 Cho đường tròn (C) : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$ thì tâm của (C) là :

a) J(1, 1, 0) b) J(1, 0, 1) c) J(0, 1, 1) d) J(0, –1, 1).

17 Cho mặt cầu (S) : $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 6$

và (d) : $\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{-1} = \frac{y+4}{1}$ thì (d) cắt (S) tại :

a) A(1, 2, –4) và B(1, –3, 1) b) A(1, 2, –4); B(1, 3, 1)

c) A(1, 2, 4); B(1, –3, 1) d) A(1, –2, –4); B(1, –3, 1).

18 Cho (Δ) : $\frac{2x-2y}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{1}$ và (S) : $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 26$.

Kết luận nào sau đây là sai :

a) (Δ) có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1, 2, 2)$

b) (Δ) tiếp xúc mặt cầu (S)

c) (Δ) nằm trong (α) : $2x - 11y + 10z - 35 = 0$

d) (Δ) cắt (S).

19 Mặt cầu tâm I(1, 3, 5) tiếp xúc với (d) : $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$ có bán kính :

a) $R = \sqrt{14}$ b) $\sqrt{7}$ c) 7 d) 14.

20 Cho (S) : $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$ và (d) : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = -2t \end{cases}$ với $t \in R$

thì (d) cắt (S) tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi :

a) $m = \frac{5}{2} \vee m = \frac{15}{2}$ b) $m < \frac{5}{2} \vee m > \frac{15}{2}$

c) $\frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}$ d) $\frac{5}{2} \le m \le \frac{15}{2}$.

21 Cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z = 0$

và (S') : $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 2z - 10 = 0$.

Kết luận nào sau đây là đúng :

a) (S), (S') ở ngoài nhau b) (S), (S') đựng nhau

c) (S), (S') cắt nhau d) (S), (S') tiếp xúc nhau.

22 Cho (S) : $(x-1)^2 + (y+2\sqrt{2})^2 + z^2 = 9$

và (S') : $(x+2)^2 + y^2 + (z-2\sqrt{2})^2 = 64$.

Kết luận nào sau đây là đúng về vị trí tương đối của (S) và (S') :

a) Cắt nhau b) Tiếp xúc trong

c) Tiếp xúc ngoài d) Ở ngoài nhau.

TRẢ LỜI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Tâm I(2, –3, –3)

$R = \sqrt{4+9+9-18} = 2$. Chọn d.

2 (S_m) là mặt cầu $\Leftrightarrow$ $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

$\Leftrightarrow$ $(m+1)^2 + (m+2)^2 - (6m-7) > 0$

$\Leftrightarrow$ $2m^2 - 2 > 0$

$\Leftrightarrow$ $m < -1 \vee m > 1$. Chọn c.

3 Ta có $BC^2 = 8 = AC^2 + AB^2$

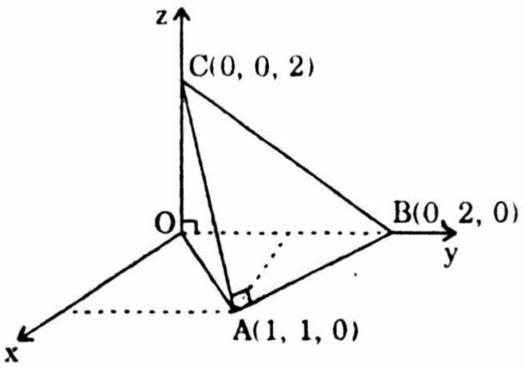
Vậy ΔABC vuông tại A.

Do $\widehat{COB} = \widehat{CAB} = 1v$

$\Rightarrow$ O, A $\in$ mặt cầu đường kính BC

Tâm I trung điểm BC là $(0, 1, 1)$.

Chọn b.

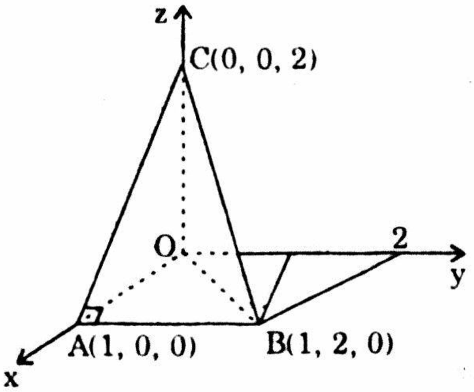


4 Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{COB} = 1v$

A và O $\in$ mặt cầu đường kính BC

$$R = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{1+4+4}}{2} = \frac{3}{2}$$

Chọn b.



5 $R = \delta(I, \alpha) = \dfrac{|48 + 10 - 19|}{\sqrt{144 + 25}} = \dfrac{39}{13} = 3.$ Chọn a.

6 Ta có $\alpha \,//\, \beta$

Chọn $M(0, -1, 0) \in (\alpha)$

thì $R = \dfrac{1}{2}\delta(\alpha, \beta) = \dfrac{1}{2}\delta(M, \beta) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{|6|}{\sqrt{9}}$. Chọn a.

7 (S) có tâm $I(-1, 1, -1)$; $R = \dfrac{4}{3}$

Mặt phẳng $(\alpha) \perp d$ có dạng : $x + 2y + 2z + D = 0$

Do điều kiện tiếp xúc $\Rightarrow$ $\delta(I, \alpha) = R$ $\Rightarrow$ $\dfrac{|-1 + 2 - 2 + D|}{\sqrt{9}} = \dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow$ $D - 1 = \pm 4$ $\Rightarrow$ $D = 5 \vee D = -3$.

Chọn c.

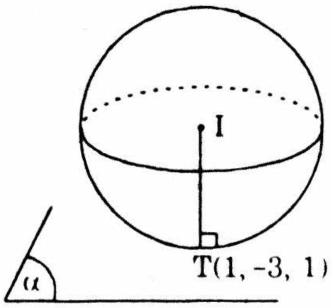
8 (S) có tâm $I(-2, 1, 0)$; $R = \sqrt{26}$

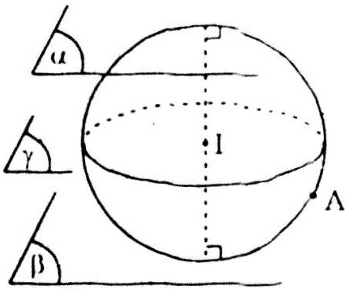
Mp (α) qua T và có PVT $\overrightarrow{IT} = (3, -4, 1)$

$\Rightarrow$ Phương trình (α) :

$$3(x - 1) - 4(y + 3) + 1(z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x - 4y + z - 16 = 0.$$ Chọn b.





$\boxed{9}$
- Do $\delta(I, \alpha) = \delta(I, \beta) = R$

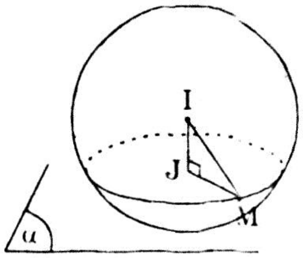
$\Rightarrow$ $I \in (\gamma)$ song song cách đều α, β

- Do $R = IA = \frac{1}{2}\delta(\alpha, \beta)$

$\Rightarrow$ $I \in$ mặt cầu (S') tâm A, bán kính $R = IA$.

Vậy I thuộc đường tròn là giao của γ và (S').

Chọn b.



$\boxed{10}$ Ta có : $IJ = \delta(I, \alpha) = \dfrac{|2 + 4 - 2 + 5|}{\sqrt{9}} = 3$

$CV = 8\pi = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad r = JM = 4$

ΔIJM vuông $\quad \Rightarrow \quad R^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2$

Chọn b.

$\boxed{11}$ (S) có tâm I(2, –1, 3); R = 1 (phương trình Oz $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$)

Mp(P) có dạng : $x + my = 0$

Do điều kiện tiếp xúc $\quad \Rightarrow \quad \delta(I, \alpha) = \dfrac{|2 - m|}{\sqrt{1 + m^2}} = 1$

$\Rightarrow \quad 4 - 4m + m^2 = m^2 + 1$

$\Rightarrow \quad m = \dfrac{3}{4}$. Chọn b.

$\boxed{12}$ (S) có tâm I(1, –1, 1); R = 3.

Phương trình d qua I và $\perp \alpha$ là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Thay vào phương trình (P) $\quad \Rightarrow \quad 2(1 + 2t) + 2(2t - 1) + t + 1 = 10$

$\Rightarrow \quad 9t = 9 \quad \Rightarrow \quad t = 1$

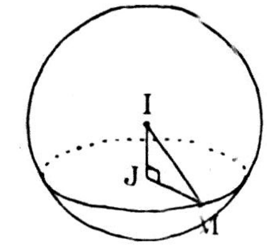
Vậy T(3, 1, 2). Chọn a.

$\boxed{13}$ Tâm của (S) là I(2, –3, –3); $R^2 = 4 + 9 + 9 - 17 = 5$

$IJ = \delta(I, \alpha) = \dfrac{|2 + 6 - 7 + 1|}{\sqrt{9}} = 1$

$r^2 = JM^2 = R^2 - IJ^2 = 5 - 1 = 4$

$\Rightarrow \quad r = 2$. Chọn d.



14 $\vec{a}_d = (1, 1, 2)$; $\vec{a}_{d'} = (1, 2, 1)$

⇒ PVT $\vec{n}_\alpha = (-3, 1, 1)$

Phương trình (α) dạng : $3x - y - z + D = 0$

Do điều kiện tiếp xúc ⇒ $\delta(I, \alpha) = R$ ⇒ $\dfrac{|3 + 1 - 0 + D|}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$

⇒ $D + 4 = \pm 11$ ⇒ $D = 7 \vee D = -15$

Chọn d.

15 $A(1, 2, -2)$; $B(-4, 2, 3)$; $C(1, -3, 3)$

MP(ABC) có VTCP $\overrightarrow{AB} = (-5, 0, 5) = -5(1, 0, -1)$

$\overrightarrow{AC} = (0, -5, 5) = -5(0, 1, -1)$

⇒ PVT $\vec{n} = (1, 1, 1)$

Phương trình (ABC) : $(x - 1) + 1(y - 2) + 1(z + 2) = 0$

Phương trình đường tròn (ABC) : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$

Chọn c.

16 Phương trình (d) qua O và ⊥ (α) : $x + z - 2 = 0$

$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ Thay vào (α) ⇒ $t + t = 2$ ⇒ $t = 1$.

Vậy tâm $J(1, 0, 1)$. Chọn b.

17 Gọi $A = d \cap (S)$

$A \in d$ ⇒ $\exists t$ $A : (1, 2 - t, -4 + t)$

$A \in (S)$ ⇒ $3^2 + (1 - t)^2 + (t - 4)^2 = 26$

⇒ $2t^2 - 10t = 0$ ⇒ $t = 0 \vee t = 5$

Vậy giao điểm $A(1, 2, -4)$; $B(1, -3, 1)$. Chọn a.

18 Hiển nhiên a đúng. Chỉ cần kiểm tra b và d.

(S) tâm $I(1, 2, -2)$; $R = 5$.

(Δ) qua $a(1, -3, 0)$; VTCP $\vec{a} = (1, 2, 2)$ ⇒ $\overrightarrow{IA} = (0, -5, 2)$

⇒ $[\vec{a}, \overrightarrow{IA}] = (14, -2, -5)$

$$\delta(I, \Delta) = \frac{\sqrt{196 + 4 + 25}}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{15}{3} = R$$

$\Rightarrow$ (S) tiếp xúc (Δ). Chọn b.

19 (d) qua M(0, –1, 2), VTCP $\vec{a} = (1, -1, -1)$

$$\overrightarrow{MI} = (1, 4, 3)$$

$$\Rightarrow \quad [\vec{a}, \overrightarrow{MI}] = (1, -4, 5)$$

$$R = \delta(I, d) = \frac{\sqrt{1 + 16 + 25}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{42}{3}} = \sqrt{14}.$$ Chọn a.

20 Thay phương trình (d) vào phương trình (S).

$\Rightarrow \quad (t + 1)^2 + (mt + 4)^2 + (2t + 2)^2 = 1$

$\Rightarrow \quad (5 + m^2)t^2 + (10 + 8m)t + 20 = 0$

Ycbt $\Rightarrow \quad \Delta = (4m + 5)^2 - 20(m^2 + 5) > 0$

$\Rightarrow \quad -4m^2 + 40m - 75 > 0$

$\Rightarrow \quad \frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}$. Chọn c.

21 (S) có tâm I(1, –2, 2); $R = 3$

(S') có tâm J(–2, 1, 1); $R' = 4$

Ta có $IJ^2 = 9 + 9 + 1 = 19$

Do $R' - R < IJ < R + R'$

Vậy (S), (S') cắt nhau. Chọn c.

22 (S) có tâm $I(1, -2\sqrt{2}, 0)$; $R = 3$.

(S') có tâm $J(-2, 0, 2\sqrt{2})$; $R' = 8$.

Ta có $IJ = \sqrt{9 + 8 + 8} = 5 = R' - R$

$\Rightarrow$ (S), (S') tiếp xúc trong. Chọn b.

MỤC LỤC

Phần 1 : HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRÊN MẶT PHẲNG Oxy

Bài 1 : Vectơ 3

37 câu hỏi trắc nghiệm 9

Bài 2 : Tọa độ của vectơ và điểm 19

30 câu hỏi trắc nghiệm 27

Bài 3 : Đường thẳng 35

Vấn đề 1 : Viết phương trình đường thẳng 35

Vấn đề 2 : Vị trí tương đối của hai đường thẳng 45

Vấn đề 3 : Góc của hai đường thẳng - Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng - Đường phân giác 47

30 câu hỏi trắc nghiệm 53

Bài 4 : Đường tròn 62

Vấn đề 1 : Lập phương trình đường tròn 62

Vấn đề 2 : Phương tích - Trục đẳng phương của hai đường tròn 70

Vấn đề 3 : Vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn – Viết phương trình tiếp tuyến 74

Vấn đề 4 : Vị trí tương đối của hai đường tròn 80

31 câu hỏi trắc nghiệm 86

Bài 5 : Elip 95

12 câu hỏi trắc nghiệm 105

Bài 6 : Hyperbol 110

12 câu hỏi trắc nghiệm 115

Bài 7 : Parabol 119

12 câu hỏi trắc nghiệm 128

Phần 2 : HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1 : Phương pháp tọa độ trong không gian 132

25 câu hỏi trắc nghiệm 139

Bài 2 : Mặt phẳng 146

30 câu hỏi trắc nghiệm 157

Bài 3 : Đường thẳng trong không gian 165

30 câu hỏi trắc nghiệm 180

Bài 4 : Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng ... 191

20 câu hỏi trắc nghiệm ... 203

Bài 5 : Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian ... 209

15 câu hỏi trắc nghiệm ... 229

Bài 6 : Mặt cầu ... 235

Vấn đề 1 : Viết phương trình mặt cầu ... 235

Vấn đề 2 : Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu ... 238

Vấn đề 3 : Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt cầu ... 246

Vấn đề 4 : Vị trí tương đối của hai mặt cầu ... 249

22 câu hỏi trắc nghiệm ... 253

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9724852. Fax: (04) 9714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập: HẢI ĐĂNG – TRẦN HƯNG

Chế bản: Nhà sách HỒNG ÂN

Trình bày bìa: NGỌC ANH

Thực hiện liên kết: NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

---

450 BÀI TOÁN TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

Mã số: 1L - 231ĐH2007. In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH In Bao Bì Phong Tân - TP. Hồ Chí Minh. Số xuất bản: 760-2007/CXB/02-112/ĐHQGHN, ngày 19/09/2007. Quyết định xuất bản số: 539 LK/XB. In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2007.